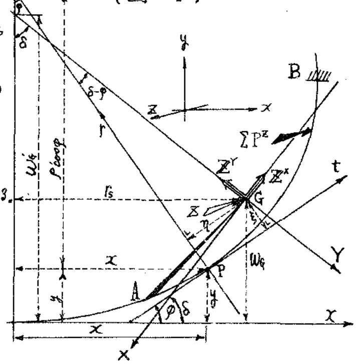
I－35　面に垂直な荷重をうけるクロソイド曲線材の立体撓角式

九州大学工学部　正員　山崎徳也
〃　〃　太田俊昭
運輸省　〃　○入江功

［序言］：図-1の如く，$X\,y$直交座標によって定義されるクロソイド曲線上の任意の2点によるAB部材の軸面に垂直な荷重が作用する場合の，材端モーメントと変形成分の関係式，即ち立体撓角式の誘導を試みる。基本系としてA端自由，B端固定の片持梁を選ぶ。他方弾性重心GとA端を剛桿で結び，G点に不静定モーメント及び反力を働かせ既往の研究[1]と同一手法でこれ等の不静定量を媒介として所要の撓角式を求めんとするものである。

（図-1）



［I］基本立体撓角式の誘導：部材上の任意点Pのr軸，t軸に関するモーメントは，次式で示される。

$$\left.\begin{aligned} M^r_\varphi &= \mathbb{Z}^X \sin(\delta-\varphi) + \mathbb{Z}^Y \cos(\delta-\varphi) + Z\cdot\eta + \mathring{M}^r \\ M^t_\varphi &= \mathbb{Z}^X \cos(\delta-\varphi) - \mathbb{Z}^Y \sin(\delta-\varphi) - Z\cdot\xi + \mathring{M}^t \end{aligned}\right\} \quad \text{-------- (1)}$$

ここに　$\mathbb{Z}^X, \mathbb{Z}^Y, Z$；$G$点に働く$X, Y$軸のまわりの不静定モーメント及び（−）$Z$方向の不静定反力。

$\mathring{M}^r, \mathring{M}^t$；静定基本系における任意点$P$の荷重によるモーメント。（図-2参照）

また　$\eta = w_G \sin\varphi + r_s \cos\varphi - (y\sin\varphi + x\cos\varphi)$　，　$\xi = w_G \cos\varphi - r_s \sin\varphi - (y\cos\varphi - x\sin\varphi)$

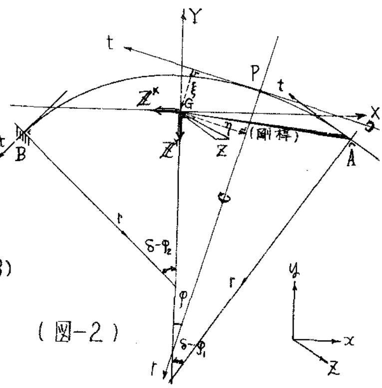
以上のモーメントにより生ずる歪エネルギーをWとすれば，G点の変形成分は

$$\left.\begin{aligned} \theta^X_G &= \frac{\partial W}{\partial \mathbb{Z}^X} = \frac{1}{EK}(a_1 \mathbb{Z}^X + b_1 \mathbb{Z}^Y + c_1 S_0 Z + L^X) \\ \theta^Y_G &= \frac{\partial W}{\partial \mathbb{Z}^Y} = \frac{1}{EK}(a_2 \mathbb{Z}^X + b_2 \mathbb{Z}^Y + c_2 S_0 Z + L^Y) \\ -\Delta Z_G &= \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{S_0}{EK}(a_3 \mathbb{Z}^X + b_3 \mathbb{Z}^Y + c_3 S_0 Z + L^Z) \end{aligned}\right\} \quad \text{------- (2)}$$

他方G点と両材端ABの変形成分の関係式を求めれば，次の如くなる。

$$\left.\begin{aligned} \theta^X_G &= \{\theta^r_A \sin(\delta-\varphi_1) + \theta^t_A \cos(\delta-\varphi_1)\} - \{-\theta^r_B \sin(\delta-\varphi_2) + \theta^t_B \cos(\delta-\varphi_2)\} \\ \theta^Y_G &= \{\theta^r_A \cos(\delta-\varphi_1) - \theta^t_A \sin(\delta-\varphi_1)\} - \{\theta^r_B \cos(\delta-\varphi_2) + \theta^t_B \sin(\delta-\varphi_2)\} \\ -\Delta Z_G &= \{\lambda \sin(\delta-\varphi_1) + b_0 \cos(\delta-\varphi_1)\}\theta^r_A + \{\lambda \cos(\delta-\varphi_1) - b_0 \sin(\delta-\varphi_1)\}\theta^t_A \\ &\quad + \{\lambda \sin(\delta-\varphi_2) + a_0 \cos(\delta-\varphi_2)\}\theta^r_B - \{\lambda \cos(\delta-\varphi_2) - a_0 \sin(\delta-\varphi_2)\}\theta^t_B - \{\Delta Z_A - \Delta Z_B\} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

（図-2）



(2),(3)式を連立に解くことにより不静定量$\mathbb{Z}^X, \mathbb{Z}^Y, Z$が両材端の変形成分で示される。

一方(1)式より $M^r_{AB} = M^r_{(\varphi=\varphi_1)}$，$M^t_{AB} = M^t_{(\varphi=\varphi_1)}$，及び $M^r_{BA} = -M^r_{(\varphi=\varphi_2)}$，$M^t_{BA} = -M^t_{(\varphi=\varphi_2)}$ を得る故これ等の式に不静定量$\mathbb{Z}^X, \mathbb{Z}^Y$及び$Z$を代入すれば，所要の立体撓角式が求められる。

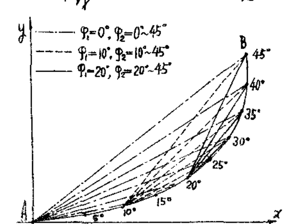
即ち
$$\left.\begin{aligned} M^r_{AB} &= EK(\alpha^r_A \theta^r_A + \beta^r_A \theta^r_B + \gamma^r_A \theta^t_A + \delta^r_A \theta^t_B + C_1 R_{AB}) + C^r_{AB} \\ M^t_{AB} &= EK(\alpha^t_A \theta^t_A + \beta^t_A \theta^t_B + \gamma^t_A \theta^r_A + \delta^t_A \theta^r_B + C_2 R_{AB}) + C^t_{AB} \\ M^r_{BA} &= EK(\alpha^r_B \theta^r_B + \beta^r_B \theta^r_A + \gamma^r_B \theta^t_B + \delta^r_B \theta^t_A + C_3 R_{AB}) + C^r_{BA} \\ M^t_{BA} &= EK(\alpha^t_B \theta^t_B + \beta^t_B \theta^t_A + \gamma^t_B \theta^r_B + \delta^t_B \theta^r_A + C_4 R_{AB}) + C^t_{BA} \end{aligned}\right\} \quad \text{------ (4)}$$

ここに　$C^r_{AB} = \frac{-1}{D}(A_1 L^X + B_1 L^Y + C_1 L^Z)$，$C^r_{BA} = -\mathring{M}^r_B - \frac{1}{D}(A_3 L^X + B_3 L^Y + C_3 L^Z)$

$C^t_{AB} = \frac{-1}{D}(A_2 L^X + B_2 L^Y + C_2 L^Z)$，$C^t_{BA} = -\mathring{M}^t_B - \frac{1}{D}(A_4 L^X + B_4 L^Y + C_4 L^Z)$

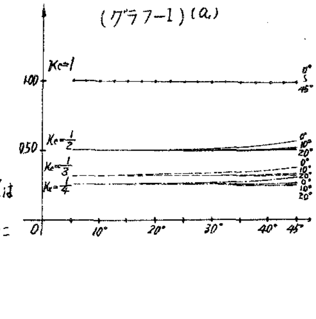
但し式中の記号は表-1及び表-2に示す。また $K = \frac{I^r}{S_0}$，$K_c = \frac{EI^r}{GJ}$，$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

EI^r；曲げ剛性，　GJ；捩り剛性



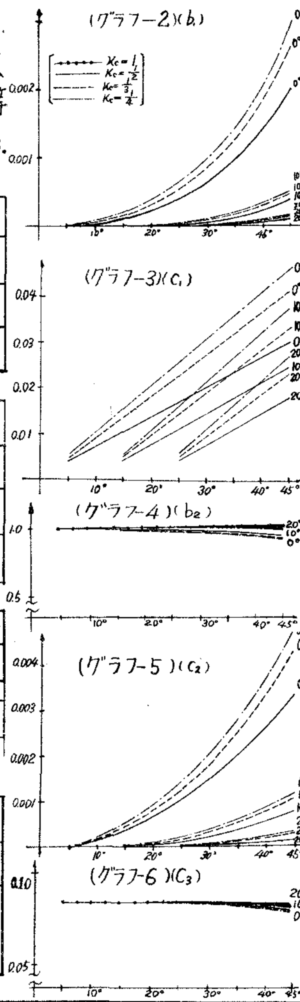
（図-3）

（グラフ-1）(a)



［II］形状項に関する考察：一般にクロソイド曲線 $\frac{\rho}{A}\frac{S}{A} = 1$ と単位クロソイド $\rho_0 S_0 = 1$ とは相似で，その相似比はAである。従って単位クロソイドに関する撓角式を求めれば，任意のクロソイド曲線の撓角式を求めるには，単に

長さのディメンジョンをA倍すればよい。さて形状項を求めるに際し、その基礎となる a, b, c を φ_1 をパラメーターとし、φ_2 を変数としたグラフで示し実用に供し得る如くした。但し本研究ではクロソイド曲線タワミ角式の特性を大観する目的で図-3に示す如き21種の組合せについて計算を行った。(グラフ1～6参照) 従ってこれ等のグラフより a, b, c の値を読み表4-1を用うれば、所要の $\alpha^r, \beta^r, \cdots$ を求め得る。なお荷重項は講演時に説明する。



(表−1)

α^r_A	$\frac{1}{D}(A_1U_1^X+B_1U_1^Y+C_1U_1^Z)$	γ^t_A	$\frac{1}{D}(A_2U_1^X+B_2U_1^Y+C_2U_1^Z)$	β^r_B	$\frac{1}{D}(A_3U_1^X+B_3U_1^Y+C_3U_1^Z)$	δ^t_B	$\frac{1}{D}(A_4U_1^X+B_4U_1^Y+C_4U_1^Z)$
γ^r_A	$\frac{1}{D}(A_1U_2^X+B_1U_2^Y+C_1U_2^Z)$	α^t_A	$\frac{1}{D}(A_2U_2^X+B_2U_2^Y+C_2U_2^Z)$	δ^r_B	$\frac{1}{D}(A_3U_2^X+B_3U_2^Y+C_3U_2^Z)$	β^t_B	$\frac{1}{D}(A_4U_2^X+B_4U_2^Y+C_4U_2^Z)$
β^r_A	$\frac{1}{D}(A_1U_3^X+B_1U_3^Y+C_1U_3^Z)$	δ^t_A	$\frac{1}{D}(A_2U_3^X+B_2U_3^Y+C_2U_3^Z)$	α^r_B	$\frac{1}{D}(A_3U_3^X+B_3U_3^Y+C_3U_3^Z)$	γ^t_B	$\frac{1}{D}(A_4U_3^X+B_4U_3^Y+C_4U_3^Z)$
δ^r_A	$\frac{1}{D}(A_1U_4^X+B_1U_4^Y+C_1U_4^Z)$	β^t_A	$\frac{1}{D}(A_2U_4^X+B_2U_4^Y+C_2U_4^Z)$	γ^r_B	$\frac{1}{D}(A_3U_4^X+B_3U_4^Y+C_3U_4^Z)$	α^t_B	$\frac{1}{D}(A_4U_4^X+B_4U_4^Y+C_4U_4^Z)$

(表−2)

A_1	$\kappa^XU_1^X+\kappa^YU_1^Y+\kappa^Z(\frac{\eta'}{S_0})$	B_1	$\nu^XU_1^X+\nu^YU_1^Y+\nu^Z(\frac{\eta'}{S_0})$	C_1	$\tau^XU_1^X+\tau^YU_1^Y+\tau^Z(\frac{\eta'}{S_0})$
A_2	$\kappa^XU_2^X+\kappa^YU_2^Y+\kappa^Z(\frac{\xi'}{S_0})$	B_2	$\nu^XU_2^X+\nu^YU_2^Y+\nu^Z(\frac{\xi'}{S_0})$	C_2	$\tau^XU_2^X+\tau^YU_2^Y+\tau^Z(\frac{\xi'}{S_0})$
A_3	$-\kappa^XU_3^X+\kappa^YU_3^Y-\kappa^Z(\frac{\eta''}{S_0})$	B_3	$-\nu^XU_3^X+\nu^YU_3^Y-\nu^Z(\frac{\eta''}{S_0})$	C_3	$-\tau^XU_3^X+\tau^YU_3^Y-\tau^Z(\frac{\eta''}{S_0})$
A_4	$\kappa^XU_4^X-\kappa^YU_4^Y+\kappa^Z(\frac{\xi''}{S_0})$	B_4	$\nu^XU_4^X-\nu^YU_4^Y+\nu^Z(\frac{\xi''}{S_0})$	C_4	$\tau^XU_4^X-\tau^YU_4^Y+\tau^Z(\frac{\xi''}{S_0})$

(表−3)

U_1^X	$\sin(\delta-\varphi_1)$	U_3^X	$\sin(\delta-\varphi_2)$	U_1^Y	$\cos(\delta-\varphi_1)$	U_3^Y	$-\cos(\delta-\varphi_2)$	U_1^Z	$\lambda\sin(\delta-\varphi_1)+b_0\cos(\delta-\varphi_1)$	U_3^Z	$\lambda\sin(\delta-\varphi_2)+a_0\cos(\delta-\varphi_2)$
U_2^X	$\cos(\delta-\varphi_1)$	U_4^X	$-\cos(\delta-\varphi_2)$	U_2^Y	$-\sin(\delta-\varphi_1)$	U_4^Y	$-\sin(\delta-\varphi_2)$	U_2^Z	$\lambda\cos(\delta-\varphi_1)-b_0\sin(\delta-\varphi_1)$	U_4^Z	$-\lambda\cos(\delta-\varphi_2)+a_0\sin(\delta-\varphi_2)$

(表−4)

κ^X	$b_2c_3-b_3c_2$	κ^Z	$a_2b_3-a_3b_2$	ν^Y	$a_1c_3-a_3c_1$	τ^X	$b_1c_2-b_2c_1$	τ^Z	$a_1b_2-b_1a_2$
κ^Y	$a_3c_2-a_2c_3$	ν^X	$b_3c_1-b_1c_3$	ν^Z	$a_3b_1-a_1b_3$	τ^Y	$a_2c_1-a_1c_2$		

(表−5)

a_1	$\frac{S}{S_0}\left[1+(1-K_c)(\Gamma_2\cos2\delta-\Gamma_3\sin2\delta-\cos^2\delta)\right]$	b_2	$\frac{S}{S_0}\left\{\sin^2\delta+K_c\cos^2\delta+(1-K_c)(\Gamma_1\cos2\delta+\Gamma_3\sin^2\delta)\right\}$
b_1, a_2	$\frac{S}{S_0}(1-K_c)(\Gamma_2\sin2\delta-\Gamma_3\cos2\delta-\sin\delta\cos\delta)$	c_2, b_3	$\frac{S}{S_0}(1-K_c)\left[\left\{(\frac{W_G}{S_0})\Gamma_3+(\frac{r_s}{S_0})\Gamma_1-(\frac{\Pi_1}{S_0})\right\}\cos\delta+\left\{(\frac{W_G}{S_0})\Gamma_2+(\frac{r_s}{S_0})\Gamma_3-(\frac{\Pi_2}{S_0})\right\}\sin\delta\right]$
c_1, a_3	$\frac{S}{S_0}(1-K_c)\left[\left\{(\frac{\Pi_2}{S_0})-(\frac{r_s}{S_0})\Gamma_3-(\frac{W_G}{S_0})\Gamma_2\right\}\cos\delta-\left\{(\frac{\Phi_2}{S_0})-(\frac{W_G}{S_0})\Gamma_3+(\frac{r_s}{S_0})\Gamma_2\right\}\sin\delta\right]$	c_3	$\frac{S}{S_0}\left[\left\{(\frac{r_s}{S_0})^2-2(\frac{W_G}{S_0})(\frac{\Pi_2}{S_0})-2(\frac{r_s}{S_0})(\frac{\Pi_1}{S_0})+(\frac{\Psi_1}{S_0^2})\right\}+K_c\left\{(\frac{W_G}{S_0})^2-2(\frac{W_G}{S_0})(\frac{\Phi_1}{S_0})+2(\frac{r_s}{S_0})(\frac{\Phi_2}{S_0})+(\frac{\Psi_2}{S_0^2})\right\}+(1-K_c)\left\{(\frac{W_G}{S_0})^2\Gamma_2+2(\frac{W_G}{S_0})(\frac{r_s}{S_0})\Gamma_3+(\frac{r_s}{S_0})^2\Gamma_2\right\}\right]$

(表−6)

x	$S(1.000,000-0.100,000\varphi^2+0.004,630\varphi^4-0.000,107\varphi^6)$	r_s	$\frac{S^2}{S_0}(0.500,000-0.016,667\varphi^2+0.000,463\varphi^4-0.000,008\varphi^6)$	Φ_1	$-S(+0.166,667\varphi-0.051,191\varphi^3+0.005,746\varphi^5-0.000,356\varphi^7+0.000,014\varphi^9)$
y	$S(0.333,333\varphi-0.023,810\varphi^3+0.000,758\varphi^5-0.000,013\varphi^7)$	W_G	$\frac{S^2}{S_0}(0.083,333\varphi-0.002,976\varphi^3+0.000,063\varphi^5)$	Φ_2	$-S(0.111,111\varphi^2-0.018,730\varphi^4+0.001,524\varphi^6-0.000,075\varphi^8)$
Γ_1	$1.000,000-0.200,000\varphi^2+0.037,037\varphi^4-0.003,419\varphi^6+0.000,187\varphi^8$	Π_1	$S(0.500,000-0.127,778\varphi^2+0.017,113\varphi^4-0.001,531\varphi^6+0.000,075\varphi^8)$	Ψ_1	$S^2(0.333,333-0.076,191\varphi^2+0.009,543\varphi^4-0.000,665\varphi^6)$
Γ_2	$0.200,000\varphi^2-0.037,037\varphi^4+0.003,419\varphi^6-0.000,187\varphi^8$	Π_2	$S(0.250,000-0.054,167\varphi^3+0.005,807\varphi^5-0.000,357\varphi^7+0.000,014\varphi^9)$	Ψ_2	$S^2(0.063,492\varphi^2-0.009,235\varphi^4+0.000,661\varphi^6-0.000,029\varphi^8)$
Γ_3	$0.333,333\varphi-0.095,238\varphi^3+0.012,121\varphi^5-0.000,847\varphi^7$				

但し $\left\{\begin{array}{ll}\eta'=(\eta)_{\varphi=\varphi_1}, & \eta''=(\eta)_{\varphi=\varphi_2}\\ \xi'=(\xi)_{\varphi=\varphi_1} & \xi''=(\xi)_{\varphi=\varphi_2}\end{array}\right\}$

[結び] $\varphi_1=10°$, $\varphi_2=30°$, $K_c=0.5$ なる部材に於いて $P=1$ が $\varphi=20°$ 点に作用する時の固定端モーメントを、この両端曲率長の平均を半径とする円弧部材のそれと比較すれば15%程度の相違があり本研究の意義が認められる。なお後日発表の平面クロソイド曲線材撓角式を併用すれば、クロソイド曲線材を含む立体ラーメンの解法が可能となる。

[参考文献] 1) 山崎、太田 "円弧部材を含む立体ラーメンの解法" 土木学会、第17回年次学術講演会概要 37年5月