

I - 29 アンクル接合部の捩りによる弾性変形 (不完全剛結特性)

九州大学工学部 正員 山崎徳也

日本国有鉄道 正員 〇標本武

(I) 緒言. 本研究は既述の発表に引継ぎ更にアンクル接合部に捩りモーメントが作用する場合の弾性変形を理論的に求めたものである。不完全剛結性を考慮した立体ラメン法は捩りを受ける格好桁合流桁等に適合し得るものゝ、本理論と全く同様の考えをあらゆる荷重状態にあるアンクル接合部の理論的解析が不能となる。尚このことは直交アンクル接合部について記述する。

(II) 解法. 接合部の解析にあつては、その変形機構より次の二つに分ける。

- ハリと柱との間にフリアランスがない場合、たゞフリアランスなく結合アンクルの下端以下にある場合を除く。
 - ハリと柱との間にフリアランスがある場合、たゞ前項の除外例を含む。(図-1参照)
- 1) は接合部はハリ下端の左端或いは右端と中心を以て回転し、捩りモーメントが左廻りに作用する時左端と、右廻りに作用する時右端とが回転中心となる。2) は接合アンクルの上下最下端のアンクル上に回転中心が存在し、腹部アンクルは屈角部の最下端と、シートアンクルは屈角部の左右先端と(左右先端に存在する)と同一)にあると仮定した。したがつてこのアンクルを便宜上弾性支承アンクルと称して一般アンクルと区別する。図-1の如くハリの軸に平行にZ軸、垂直にY軸、又断面に直交してX軸を以て任意の直交座標を導入し、接合部はシートアンクル n 個($n=1, 2, \dots, N$)、腹部アンクル l 個($l=1, 2, \dots, L$)により構成されるものとする。これらの機構に外力、捩りモーメント M により、捩り回転角を生じた時の変形状態(図-2)を考察すれば、各アンクルに働く諸力は X, Y, Z の3力と M_x, M_y, M_z の3モーメントあり、これらと逆方向のものもハリに働く。さらに1)のフリアランスがない場合にはハリは柱からの拘束力 R_x, R_y, R_z を回転中心に受ける。以上ハリの接合部に働く力モーメントが明らかとなる中、これらに関する幾何学的変形とエネルギー法により算出される変位と等値を導き、一連の条件式を得る。

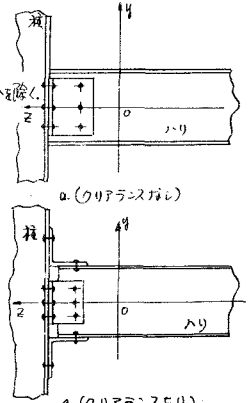


図-1.

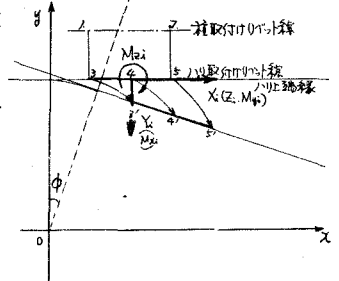


図-2 アンクル(上縁)の幾何学的変形.

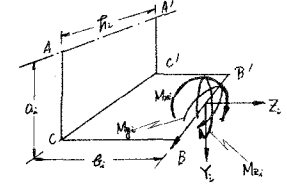


図-3 シートアンクルに働く諸力と寸法

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i + \sum X_j - R_x &= 0, & \sum Y_i + \sum Y_j + R_y &= 0, & \sum Z_i + \sum Z_j - R_z &= 0, \\ \sum Z_i Y_j - \sum Y_i Z_j + \sum M_{xi} + \sum M_{yj} - \sum Y_j Z_i + \sum M_{xy} - R_z R_y - R_y R_z &= 0, \\ \sum Z_j X_i + \sum X_j Z_i - \sum M_{yi} + \sum M_{xj} + \sum X_j Y_i - \sum M_{yx} - R_z R_x - R_x R_z &= 0, \\ \sum Y_i X_j + \sum X_j Y_i + \sum M_{zi} + \sum M_{xj} + \sum X_j Y_j + \sum M_{zy} - R_x R_y + R_y R_x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

接合部の変形機構を考察するにZ軸中心の捩り回転角と同時にX軸及びY軸中心の回転角 θ_x, θ_y が同時に発生する事から、その回転の順序は問題ないから本論に如き後述の回転の問題を近似的に回転順序に関係なくある一定の値と表わされる。この時幾何学的条件は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \delta x_i &= -\theta_y (z_i - z_0) + \phi (y_i - y_0), & \delta y_i &= \phi (x_i - x_0) - \theta_x (z_i - z_0), & \delta z_i &= \theta_x (y_i - y_0) - \theta_y (x_i - x_0) \\ \delta x_j &= -\theta_y (z_j - z_0) + \phi (y_j - y_0), & \delta y_j &= \phi (x_j - x_0) - \theta_x (z_j - z_0), & \delta z_j &= \theta_x (y_j - y_0) - \theta_y (x_j - x_0) \\ q_{xi} &= q_{ji} = \theta_x, & q_{yi} &= q_{ji} = \theta_y, & q_{zi} &= q_{ji} = \phi, \quad (\text{相対 } i=1, 2, \dots, N, \quad j=1, 2, \dots, L) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

他方変位と歪との関係するものから差をアンクルのエネルギーと求める事は(1) plate AA'C'Cの捩りによるエネルギー、(2) plate BB'C'Cの捩りによるエネルギー、(3) アンクルを片持梁と見做す時の水平面内の曲げモーメントによるエネルギー、の3種を考慮する。したがつて変位と力モーメントの関係は次の様になる。

(a) 上端アングル: エネルギー W_1 は次の通りである。(図-3参照)

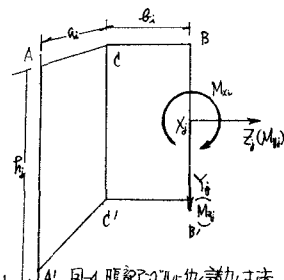
$$W_1 = \frac{Q_1}{2EK} (M_{y1} + X_1 \cdot \theta_1)^2 + \frac{Q_1}{2EK} M_{x1}^2 + \frac{1}{2K} [M_{x1}^2 (a_1 + \theta_1) + M_{y1} \cdot Y_1 \cdot \theta_1 (2a_1 + \theta_1) + Y_1^2 \frac{\theta_1^2}{3} (3a_1 + \theta_1) + Z_1^2 \frac{a_1^2}{3} - Z_1 (M_{x1} + Y_1 \cdot \theta_1) a_1^2] \\ + \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_1^3}{12} [M_{y1}^2 \frac{\theta_1^2}{3} (3a_1 + \theta_1) - M_{x1} M_{y1} a_1^2 \theta_1 + M_{y1}^2 \frac{a_1^2}{3}] \quad \text{ただし } R_1 = \frac{R_1 \theta_1^3}{12}, D_1 = \frac{\theta_1^3}{12}, E_1 = \frac{R_1^2 K}{12} \quad \text{----- (3)}$$

したがって Castigliano の定理より $\delta x_1 = \frac{Q_1 \theta_1}{EK} (M_{y1} + X_1 \cdot \theta_1) \quad \delta y_1 = \frac{1}{EK} [M_{x1} \theta_1 (2a_1 + \theta_1) + 2Y_1 \cdot \frac{\theta_1^2}{3} (3a_1 + \theta_1) - 2a_1^2 \theta_1]$
 $\delta z_1 = \frac{1}{2EK} [2Z_1 \frac{\theta_1^2}{3} - (M_{x1} + Y_1 \cdot \theta_1) a_1^2] \quad \varphi_{x1} = \frac{1}{2EK} [2M_{x1} (a_1 + \theta_1) + Y_1 \cdot \theta_1 (2a_1 + \theta_1) - 2a_1^2]$
 $\varphi_{y1} = \frac{Q_1}{EK} (M_{y1} + X_1 \cdot \theta_1) + \frac{1}{EK} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_1^3}{12} [M_{y1} \frac{\theta_1^2}{3} - \frac{1}{2} M_{x1} a_1^2 \theta_1] \quad \varphi_{z1} = \frac{Q_1}{EK} M_{x1} + \frac{1}{EK} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_1^3}{12} (M_{x1} \frac{\theta_1^2}{3} (3a_1 + \theta_1) - \frac{1}{2} M_{y1} a_1^2 \theta_1)$ ----- (4)

(b) 腹筋アングル: エネルギー W_2 は次の通りである。(図-4参照)

$$W_2 = \frac{Q_2}{2EK} (M_{y2} + Y_2 \cdot \theta_2)^2 + \frac{Q_2}{2EK} M_{x2}^2 + \frac{1}{2K} [M_{x2}^2 (a_2 + \theta_2) + M_{y2} \cdot Y_2 \cdot \theta_2 (2a_2 + \theta_2) + Y_2^2 \frac{\theta_2^2}{3} (3a_2 + \theta_2) + Z_2^2 \frac{a_2^2}{3} - Z_2 (M_{x2} + Y_2 \cdot \theta_2) a_2^2] \\ + \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_2^3}{12} [M_{y2}^2 \frac{\theta_2^2}{3} (3a_2 + \theta_2) - M_{x2} M_{y2} a_2^2 \theta_2 + M_{y2}^2 \frac{a_2^2}{3}] \quad \text{----- (5)}$$

したがって $\delta x_2 = \frac{1}{2EK} [M_{y2} \theta_2 (2a_2 + \theta_2) + 2Y_2 \cdot \frac{\theta_2^2}{3} (3a_2 + \theta_2) + Z_2^2 \frac{a_2^2}{3}] \quad \delta y_2 = \frac{Q_2}{EK} (M_{y2} + Y_2 \cdot \theta_2)$
 $\delta z_2 = \frac{1}{2EK} [2Z_2 \frac{\theta_2^2}{3} - (M_{x2} + Y_2 \cdot \theta_2) a_2^2] \quad \varphi_{x2} = \frac{Q_2}{EK} (M_{x2} + Y_2 \cdot \theta_2) + \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_2^3}{12} [M_{y2} \frac{\theta_2^2}{3} - \frac{1}{2} M_{x2} a_2^2 \theta_2]$
 $\varphi_{y2} = \frac{1}{2EK} [2M_{y2} (a_2 + \theta_2) + Y_2 \cdot \theta_2 (2a_2 + \theta_2) + Z_2^2 \frac{a_2^2}{3}] \quad \varphi_{z2} = \frac{Q_2}{EK} M_{x2} + \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_2^3}{12} (M_{x2} \frac{\theta_2^2}{3} (3a_2 + \theta_2) + \frac{1}{2} M_{y2} a_2^2 \theta_2)$ ----- (6)



以上(4),(6)式を(5)式に代入すれば、連立方程式を得る。これらより未知数に角 θ が求まる。

ii) の場合: ハリは直接柱に反力を受けぬ。ハリに繋がる釣合点は i) において $R_x = R_y = R_z = 0$ と仮定する。

またアングルの変位に関する幾何学的条件は弾性支承アングルの x, y, z 方向の変位 $\delta x_B, \delta y_B, \delta z_B$ と θ の間に成り立つ。

$$\delta x_1 = -\theta_1 (z_1 - z_0) + \phi (y_1 - y_0) + \delta x_B \quad \delta y_1 = \phi (x_1 - x_0) - \theta_1 (z_1 - z_0) + \delta y_B \quad \delta z_1 = \theta_1 (y_1 - y_0) - \theta_1 (x_1 - x_0) + \delta z_B$$

$$\delta x_2 = -\theta_2 (z_2 - z_0) + \phi (y_2 - y_0) + \delta x_B \quad \delta y_2 = \phi (x_2 - x_0) - \theta_2 (z_2 - z_0) + \delta y_B \quad \delta z_2 = \theta_2 (y_2 - y_0) - \theta_2 (x_2 - x_0) + \delta z_B$$

$$\varphi_{x1} = \varphi_{x2} = \theta_1 \quad \varphi_{y1} = \varphi_{y2} = \theta_2 \quad \varphi_{z1} = \varphi_{z2} = \phi \quad (\text{ただし } i, j = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, l)$$
 ----- (7)

一般のアングルにおけるカモメントと変位の関係は(4),(6)式より得られる弾性支承アングルの異なる次のようになる。

(a) 下端弾性アングルの場合: エネルギー算定は i) の場合と全く同様である。柱の反力 R は加える必要はない。向反力 a は

用兵の変位 θ をゼロとすることより反力 a アングルに働く他の諸力との関係が求まる。以上より結果 a を代入せば次式となる。

$$\delta x_B = \frac{Q_1 \theta_1}{EK} (M_{y1} + X_1 \theta_1 - R_1 \frac{R_1 \theta_1}{12}) \quad \delta y_B = \frac{1}{2EK} [M_{x1} \theta_1 (2a_1 + \theta_1) + 2Y_1 \cdot \frac{\theta_1^2}{3} (3a_1 + \theta_1) + (Z_1 + R_1) a_1^2 \theta_1]$$

$$\delta z_B = \frac{1}{2EK} [2Z_1 \frac{\theta_1^2}{3} - (M_{x1} + Y_1 \theta_1) a_1^2] \quad \varphi_{x1} = \frac{Q_1}{2EK} [2M_{x1} (a_1 + \theta_1) + Y_1 \theta_1 (2a_1 + \theta_1) + a_1^2 (Z_1 + R_1)]$$

$$\varphi_{y1} = \frac{Q_1}{EK} (M_{y1} + X_1 \theta_1 - R_1 \frac{R_1 \theta_1}{12}) + \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_1^3}{12} [M_{y1} \frac{\theta_1^2}{3} - \frac{1}{2} M_{x1} a_1^2 \theta_1] \quad \varphi_{z1} = \frac{Q_1}{EK} M_{x1} + \frac{1}{2K} \left(\frac{1}{3} \right) \frac{R_1^3}{12} [M_{x1} \frac{\theta_1^2}{3} (3a_1 + \theta_1) - \frac{1}{2} (M_{y1} R_1 \frac{R_1 \theta_1}{12}) a_1^2 \theta_1]$$

したがって $\delta R_1 = 0$ より $R_1 = \frac{(\frac{Q_1 R_1}{2EK} \frac{a_1^2 \theta_1^2}{12} \frac{R_1^3}{12} + \frac{Q_1}{2EK} \frac{a_1^2 \theta_1^2}{12} \frac{R_1^3}{12})}{\frac{Q_1 R_1^2}{2EK} + \frac{Q_1^2}{3EK} + \frac{Q_1^2 R_1^2}{12EK} (\frac{R_1^3}{12})^2} (M_{x1} + Y_1 \theta_1)$ ----- (8)

(b) 下端弾性腹筋アングルの場合: 結果を記せば次の通りである。

$$\delta x_B = \frac{1}{2EK} [M_{y2} \theta_2 (2a_2 + \theta_2) + \frac{2}{3} X_2 \theta_2^2 (3a_2 + \theta_2) + (Z_2 + R_2) a_2^2 \theta_2] \quad \delta y_B = \frac{Q_2}{EK} (M_{x2} + Y_2 \theta_2 - R_2 \frac{R_2 \theta_2}{12})$$

$$\delta z_B = \frac{1}{2EK} [M_{y2} a_2^2 + 2Z_2 (a_2 + \theta_2) \frac{\theta_2^2}{3} + X_2 a_2^2 \theta_2] \quad \varphi_{x2} = \frac{Q_2}{EK} (M_{x2} + Y_2 \theta_2 - R_2 \frac{R_2 \theta_2}{12}) + \frac{1}{2K} [(M_{x2} R_2 \frac{R_2 \theta_2}{12}) (\frac{1}{3}) \frac{\theta_2^2}{3} + M_{x2} (\frac{1}{3}) \frac{R_2^3}{12} \frac{\theta_2^2}{3} a_2^2 \theta_2]$$

$$\varphi_{y2} = \frac{1}{2EK} [2M_{y2} (a_2 + \theta_2) + X_2 \theta_2 (2a_2 + \theta_2) + (Z_2 + R_2) a_2^2] \quad \varphi_{z2} = \frac{Q_2}{EK} M_{x2} + \frac{1}{2K} [2M_{x2} (\frac{1}{3}) \frac{R_2^3}{12} \frac{\theta_2^2}{3} (3a_2 + \theta_2) + (M_{x2} R_2 \frac{R_2 \theta_2}{12}) (\frac{1}{3}) \frac{R_2^3}{12} \frac{\theta_2^2}{3} a_2^2 \theta_2]$$

したがって $\delta R_2 = 0$ より $R_2 = \frac{(\frac{Q_2 R_2}{2EK} \frac{a_2^2 \theta_2^2}{12} \frac{R_2^3}{12} + \frac{Q_2}{2EK} \frac{a_2^2 \theta_2^2}{12} \frac{R_2^3}{12})}{\frac{Q_2 R_2^2}{2EK} + \frac{Q_2^2}{3EK} + \frac{Q_2^2 R_2^2}{12EK} (\frac{R_2^3}{12})^2} (M_{x2} + Y_2 \theta_2)$ ----- (9)

以上各アングルの δ, φ は作用諸力との関係が求まる。したがって(7)式に代入し、ハリの釣合条件式を建立し、これより i) の場合同様理論解が得られる。

参考文献: 1) 山崎: 上・下端弾性腹筋アングル接合部の弾性変形(予完全図解付録) 昭和36年、土木学会西部支庁研究発表会予録。

2) 山崎: 斜角をもちアングル接合部の弾性変形(予完全図解付録) 昭和37年、土木学会東支庁研究発表会予録。

3) 山崎: 直交アングル接合部の弾性変形(予完全図解付録) 昭和37年、応用力学組合学会支庁研究発表会予録。