I − 28　"Kani"の新拡張法

(2) 立体直線材ラーメンの解法

九州大学工学部　正員　○山崎　徳也
〃　　　　　　　正員　太田　俊昭

[序言] 直線部材からなる立体ラーメンの解法としては、従来撓角式による連立解法やイテラチオン法,その他及びCross法等が知られている。ここに提案する手法はKani新拡張法と称すべきもので,Cross法,その他に比べて収斂度も高く計算手段もはるかに容易である。なお配分計算において計算尺を用いれば精度を落すことなく演算を一層迅速に行うことが出来る。

[I] 定義及び記号; 空間座標として(x, y, z)を定める。又モーメントM^x, M^y, M^z及び回転角$\theta^x, \theta^y, \theta^z$は夫々$x, y, z$軸の負の方向に向って右まわりを正とする。次に曲げ及び捩りモーメント式を次式で表わす。

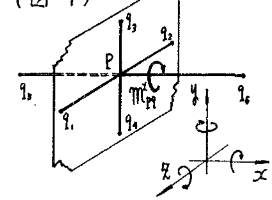
$$\left.\begin{array}{ll} \text{曲げモーメント式 --- } M_{pq} = \alpha_1 m_{pq} + \beta_1 m_{qp} + (M_R)_{pq} + C_{pq} & \text{捩りモーメント式 --- } M_{pq} = \alpha_2 m_{pq} + \beta_2 m_{qp} + C_{pq} \\ M_{qp} = \beta_1 m_{pq} + \alpha_1 m_{qp} + (M_R)_{pq} + C_{qp} & M_{qp} = \beta_2 m_{pq} + \alpha_2 m_{qp} + C_{qp} \end{array}\right\} \quad \text{------(1)}$$

[但し $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = \rho_0$, $m = EK\theta$; 回転モーメント , $M_R = -6EKR$; 部材角モーメント , C_{pq} , C_{qp} ; 固定端モーメント
$\beta_1 = 2$, $\beta_2 = -\rho_0$, E=ヤング率 , I=慣性モーメント , $\rho_0 = GJ/EI$, GJ=捩り剛性]

[II] 基本式の誘導

(1) 回転モーメントに関する式; x軸のまわりの回転モーメントm^xについて考える。(図-1)参照
y-z planeの一点Pに集る部材(面部材),及びこの点に連結されるx方向部材(連結材)を考え
P点においてx軸に関するモーメントの釣合式を立てると　$\sum_q M^x_{pq} = 0$ ------(2)

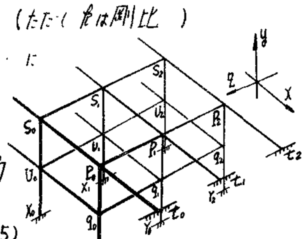
(図-1)



(1)(2)から
$$\left.\begin{array}{l} m^x_{pq} = \mu^x_{pq}\left[\sum C^x_{pq} + \sum (M^x_R)_{pq} + \sum \beta_1 m^x_{qp} + \sum \beta_2 m^x_{qp}\right] \\ m^y_{pq} = \mu^y_{pq}\left[\sum C^y_{pq} + \sum (M^y_R)_{pq} + \sum \beta_1 m^y_{qp} + \sum \beta_2 m^y_{qp}\right] \\ m^z_{pq} = \mu^z_{pq}\left[\sum C^z_{pq} + \sum (M^z_R)_{pq} + \sum \beta_1 m^z_{qp} + \sum \beta_2 m^z_{qp}\right] \end{array}\right\} \text{---------(3)}$$
同様にて（上式第2, 第3式）

ここに $\mu^x_{pq} = -k^x_{pq}/\sum \alpha_1 k^x_{pq} + \sum \alpha_2 k^x_{pq}$, $\mu^y_{pq} = -k^y_{pq}/\sum \alpha_1 k^y_{pq} + \sum \alpha_2 k^y_{pq}$, $\mu^z_{pq} = -k^z_{pq}/\sum \alpha_1 k^z_{pq} + \sum \alpha_2 k^z_{pq}$ (ただし kは剛比)

(2) 部材角モーメントに関する式; 一例として(図-2)の如くz方向の移動を許した節点$P_0, P_1, \cdots$ に
連る部材PS, Pt, Pqにおける部材角モーメント($\tilde{M}_R$)の関係式を導く。セン断力の釣合式から
$$\bar{H}^z_p + \sum Q^z_{ps} - \sum Q^z_{pt} - \sum Q^z_{pq} = 0 \quad \text{----------------(4)}$$
ここに $\bar{H}^z_p$は部材をSimple beamと考えた時の荷重による反力の総和 , Q^zは各部材のz方向の端セン力



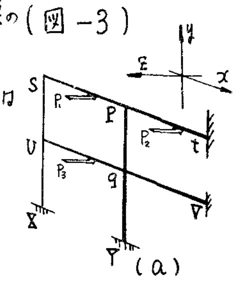
(図-2)

(1)(4)式から
$$\left.\begin{array}{l} (\tilde{M}^x_R)_{pq} = V^x_{pq}\left[\mathbb{M}_p + \sum C_k (m^x_{pq} + m^x_{qp}) + \sum C_\ell (m^y_{pt} + m^y_{tp}) - \sum C_\ell (m^y_{ps} + m^y_{sp})\right] \\ (\tilde{M}^y_R)_{ps} = V^y_{ps}\left[\mathbb{M}_p + \sum C_k (m^x_{pq} + m^x_{qp}) + \sum C_\ell (m^y_{pt} + m^y_{tp}) - \sum C_\ell (m^y_{ps} + m^y_{sp})\right] \\ (\tilde{M}^y_R)_{pt} = V^y_{pt}\left[\mathbb{M}_p + \sum C_k (m_{pq} + m^x_{qp}) + \sum C_\ell (m^y_{pt} + m^y_{tp}) - \sum C_\ell (m^y_{ps} + m^y_{sp})\right] \end{array}\right\} (5)$$

ここに $V^x_{pq} = -3(C_k k)_{pq}/\sum C_k^2 k + \sum C_\ell^2 k$, $V^y_{pt} = -3(C_\ell k)_{pt}/\sum C_k^2 k + \sum C_\ell^2 k$, $V^y_{ps} = +3(C_\ell k)_{ps}/\sum C_k^2 k + \sum C_\ell^2 k$, $C_k = k/h_0$, $C_\ell = \ell/h_0$, h_0;標準長

[III] 演算の順序; (図-3a)の如き簡単なラーメンを例にて説明する。基本系として変位を有する節点のうち(−)z方向に向って最も右上の点(このラーメンではP点)をつねにfreeな状態にする。

(図 −3)



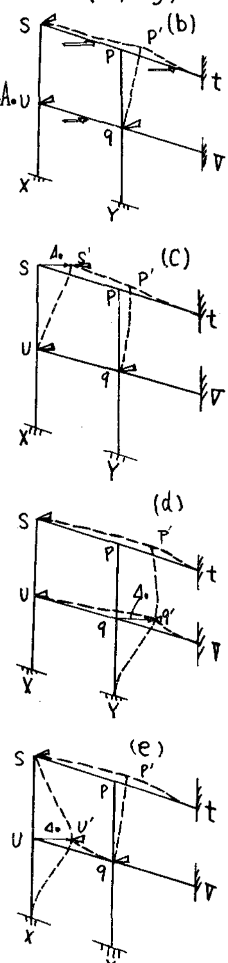
(a)

(1) 荷重を加え S, U, q, 点のz方向の変位を零に保つ。(図-3b)　加えるべき拘束モーメントは固定端モーメントである。又部材角モーメントに関しては $(M^x_R)_{pq} = (\tilde{M}^x_R)_{pq}$, $(M^y_R)_{ps} = (\tilde{M}^y_R)_{ps}$, $(M^y_R)_{pt} = (\tilde{M}^y_R)_{pt}$
(5)式中の$\mathbb{M}_p$の値はこの場合次式で示される。$\mathbb{M}_p = \frac{1}{6}\{h_0 \bar{H}^z_p + C_k (C^x_{pq} + C^x_{qp}) + C_\ell (C^y_{pt} + C^y_{tp}) - C_\ell (C^y_{ps} + C^y_{sp})\}$

(2) 荷重を除き, S点の変位Δ_0のみ許し U, q点の変位を零に保つ。(図-3c)
拘束モーメント; $(\bar{M}^x_R)_{su} = (kC_\ell)_{su} A_0$, $(\bar{M}^y_R)_{sp} = (kC_\ell)_{sp} A_0$,　ここに $A_0 = -6EK_0 \frac{\Delta_0}{h_0}$; 適当なラウンド数を仮定する。

部材角モーメント；$(M^x_R)_{pq}=(\tilde{M}^x_R)_{pq}$ ，$(M^y_R)_{ps}=(\tilde{M}^y_R)_{ps}+(C_e k)_{ps}A_0$ ，$(M^y_R)_{pt}=(\tilde{M}^y_R)_{pt}$ ，又 $M_p=-\frac{1}{3}(C_e^2 k)_{ps}A_0$

(図-3)



(3)荷重を除きq点の変位Δ_0のみ許し，U,S,点の変位を零に保つ。(図-3d)

拘束モーメント；$(\bar{M}^x_R)_{qY}=(C_e k)_{qY}A_0$，$(\bar{M}^y_R)_{qU}=-(C_e k)_{qU}A_0$ ，$(\bar{M}^y_R)_{qV}=(C_e k)_{qV}A_0$

部材角モーメント；$(M^y_R)_{ps}=(\tilde{M}^y_R)_{ps}-(C_e k)_{ps}A_0$ ，$(M^y_R)_{pt}=(\tilde{M}^y_R)_{pt}+(C_e k)_{pt}A_0$ ，$(M^x_R)_{pq}=(\tilde{M}^x_R)_{pq}-(C_e k)_{pq}A_0$

又 $M_p=\frac{1}{3}\{(C_e^2 k)_{pt}+(C_e^2 k)_{ps}\}A_0$

(4)荷重を除きU点の変位Δ_0のみ許し，S,q点の変位を零に保つ。(図-3e)

拘束モーメント；$(\bar{M}^x_R)_{UX}=(C_e k)_{UX}A_0$ ，$(\bar{M}^x_R)_{US}=-(C_e k)_{US}A_0$ ，$(\bar{M}^y_R)_{Uq}=(C_e k)_{Uq}A_0$

部材角モーメント；$(M^y_R)_{ps}=(\tilde{M}^y_R)_{ps}$ ，$(M^y_R)_{pt}=(\tilde{M}^y_R)_{pt}$ ，$(M^x_R)_{pq}=(\tilde{M}^x_R)_{pq}$

又 $M_p=0$

(5) 以上(1)~(4)のバランス計算の結果得たモーメント値を夫々 $\overset{(1)}{M},\overset{(2)}{M},\overset{(3)}{M},\overset{(4)}{M}$，さらに(2)~(4)の場合の補正係数を夫々$\beta_1,\beta_2,\beta_3$，とすれば，求める端モーメントは次式で与えられる。

$$M=\overset{(1)}{M}+\beta_1\overset{(2)}{M}+\beta_2\overset{(3)}{M}+\beta_3\overset{(4)}{M} \qquad \text{------(6)}$$

(6)補正係数　S,q 及び U点において Z方向の力の釣合式を立てると，(図-4)

$$\left.\begin{aligned} &\text{S点---}\ F^z_s=\bar{H}^z_s-Q^z_{sp}-Q^z_{sU}\\ &\text{q点---}\ F^z_q=\bar{H}^z_q+Q^z_{qU}+Q^z_{qp}-Q^z_{qV}-Q^z_{qY}\\ &\text{U点---}\ F^z_U=\bar{H}^z_U+Q^z_{US}-Q^z_{Uq}-Q^z_{UX}\end{aligned}\right\} \qquad \text{------(7)}$$

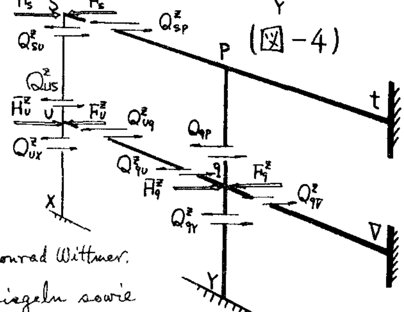
但し F^zは Z方向の反力， Q^zは Z方向の端センカを意味する。

(7)式を用い(1)~(4)の場合について算出した反力を夫々$\overset{(1)}{F},\overset{(2)}{F},\overset{(3)}{F},\overset{(4)}{F}$，とすれば Fとβに関する境界条件として次式を満足せねばならぬ。

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(1)}{F^z_s}+\beta_1\overset{(2)}{F^z_s}+\beta_2\overset{(3)}{F^z_s}+\beta_3\overset{(4)}{F^z_s}=0\\ &\overset{(1)}{F^z_q}+\beta_1\overset{(2)}{F^z_q}+\beta_2\overset{(3)}{F^z_q}+\beta_3\overset{(4)}{F^z_q}=0\\ &\overset{(1)}{F^z_U}+\beta_1\overset{(2)}{F^z_U}+\beta_2\overset{(3)}{F^z_U}+\beta_3\overset{(4)}{F^z_U}=0\end{aligned}\right\} \qquad \text{------(8)}$$

依って(8)式を解くことによりβ_1,β_2,β_3，を求め得る。

[結語] 以上の諸式を用いれば Kani法に準じて直線材立体ラーメンを解くことが出来る。本法は Cross法と異り変位を有する節点の内，一点のみを free とする系を選んで解法過程の簡易化を計ったが，さらに高度の簡易化手法として，それ以上の節点を free にする系を考えられる。しかしこの場合は，自由節点数だけの連立方程式を解く必要があるので，せいぜい 1~4節点までが限度で，それ以上は煩雑となる。



(図-4)

参考文献；

1) Kani, G ; "Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen." 6 Aufl. Konrad Wittwer.

2) Sahmel, P ; "Die Berechnung von Rahmen mit geknickten Riegeln sowie Polygonrahmen nach dem erweiterten Iterations-verfahren von Kani" , Beton- und Stahlbetonbau , 1961—8

3) 山崎,太田 ; "Kani"の新拡張法 (1)伸縮部材を含む平面ラーメンの解法 , 第18回 年次学術講演会概要 昭和38年 (土木学会)