I－26　面外への変形をともなうラーメンの解法

信州大学工学部　正員　　吉田俊弥

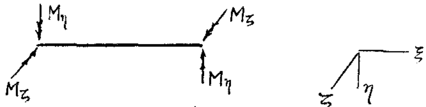
仝　上　　　正員　○草間孝志

部材の主軸がラーメンの面内にないような部材を有するラーメンにおいては，例え荷重がラーメンの面内に作用している場合でも，面外への変形をともなう．本報告はこのようなラーメンを仮想仕事式ならびにたわみ角法による解法について述べんとするものである．

1．仮想仕事式

非対称曲げと捩りをうける部材の内部仕事Wは

$$W=\frac{1}{2}\int_l \frac{I_\xi M_\eta^2+I_\eta M_\xi^2-2I_{\eta\xi}M_\eta M_\xi}{E(I_\eta I_\xi-I_{\eta\xi}^2)}d\xi+\frac{1}{2}\int_l \frac{T^2}{GJ}d\xi$$



第1図

によって与えられる（第1図）．またn次不静定構造物の不静定量を$X_1, X_2, \cdots X_n$とすると，弾性方程式は次のようになる（$i=1,2,\cdots n$）．但し軸力，せん力などは無視の場合．

$$X_1\left[\int_l \frac{1}{EI}\left\{I_\eta M_{\xi1}M_{\xi i}+I_\xi M_{\eta1}M_{\eta i}-I_{\eta\xi}(M_{\eta1}M_{\xi i}+M_{\xi1}M_{\eta i})\right\}d\xi+\int_l \frac{1}{GJ}T_1T_i\,d\xi\right]$$

$$+X_2\left[\int_l \frac{1}{EI}\left\{I_\eta M_{\xi2}M_{\xi i}+I_\xi M_{\eta2}M_{\eta i}-I_{\eta\xi}(M_{\eta2}M_{\xi i}+M_{\xi2}M_{\eta i})\right\}d\xi+\int_l \frac{1}{GJ}T_2T_i\,d\xi\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots=\int_l \frac{1}{EI}\left\{I_\eta M_{\xi0}M_{\xi i}+I_\xi M_{\eta0}M_{\eta i}-I_{\eta\xi}(M_{\eta0}M_{\xi i}+M_{\xi0}M_{\eta i})\right\}d\xi+\int_l \frac{1}{GJ}T_0T_i\,d\xi-(1\cdot\delta_i+R_i)$$

こゝに$I=I_\eta I_\xi-I_{\eta\xi}^2$，$M_{\eta i}, M_{\xi i}, T_i$は$X_i=-1$に対する静定基本系の曲げモーメントと捩りモーメントを表わし，$1\cdot\delta_i+R_i$は支点変位によって生ずる量である．

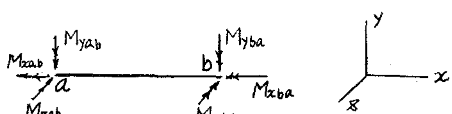
2．たわみ角法

たわみ角法に便ならしめるためには第2図の座標系をとる方がよいようである．端モーメント，たわみ角，部材角とも各軸の原点に対し右まわりを正とすると，例えばa端における端モーメント式は次のようになる．

$$M_{xab}=2\beta k_{xab}(\varphi_{xa}-\varphi_{xb})+C_{xab},$$

$$M_{yab}=k_{yab}(2\varphi_{ya}+\varphi_{yb}+\psi_{yab})-\lambda_{ab}(2\varphi_{za}+\varphi_{zb}+\psi_{zab})+C_{yab},$$

$$M_{zab}=k_{zab}(2\varphi_{za}+\varphi_{zb}+\psi_{zab})-\lambda_{ab}(2\varphi_{ya}+\varphi_{yb}+\psi_{yab})+C_{zab}.$$



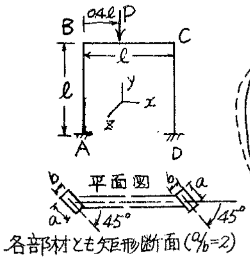
第2図

たゞし，$\beta=m/8(m+1)$，$m=$ポアソン数，$k=K/K_0$，$K=I/l$（曲げ），$=J/l$（捩り），$\lambda=\Delta/l$，$\Delta=I_{yz}/l$，$K_0=$規準剛度，$\varphi=2EK_0\theta$，$\psi=-6EK_0R$，$C=$荷重項（通常用いられている値と同じ）である．上記の端モーメント式のうちの第1式は捩りに関するもので軸記号のxは部材の軸方向に一致し，第2,3式は曲げに対するもので，例えばM_yについては部材断面の主軸がy, z軸に一致しないことによって生ずるλの項のみがもう一つの曲げの軸（z）の軸記号であり，その他のものは今考えている端モーメント（M_y）の軸（y）の記号をとる．従って比較的記憶し易く，部材断面の断面二次モーメントと相乗モーメントを求めておきさえすれば容易に書下すことができる．未知数φ, ψを求めるための条件式は立体ラーメンの場合と全く同様である．すなわち例えば任意節点aに対しては次のようになる．

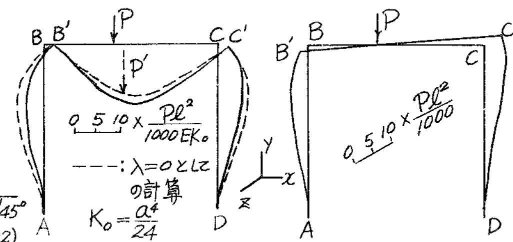
$\Sigma M_{xa}=\bar{M}_{xa}$, $\Sigma M_{ya}=\bar{M}_{ya}$, $\Sigma M_{za}=\bar{M}_{za}$, $\Sigma X_x=Q_x$, $\Sigma X_y=Q_y$, $\Sigma X_z=Q_z$

3　計算例 (1)

オ3図のラーメンに対して各部材の端モーメントの値を前述の方法により求め，各部材のたわみは曲げモーメントのみによって生じ，捩りモーメントはたわみには影響しないものとして非対称曲げのたわみの式を用いてたわみ曲線を計算するとオ4図のようになる．



オ3図



面内のたわみ　　面外のたわみ

オ4図

各部材の最大たわみ　係数 $\frac{P\ell^3}{1000EK_0}$

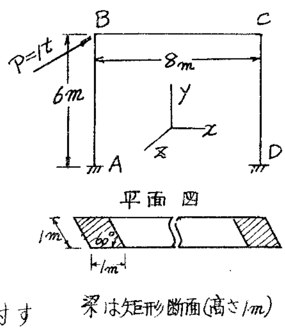
部材	面内の最大たわみ x, y		面外の最大たわみ z	
	位置	最大たわみ	位置	最大たわみ
A→B	0.6ℓ (0.6ℓ)	−4.0 (−5.6)	0.7ℓ	+3.9
B→C	0.5ℓ (0.5ℓ)	−12.7 (−11.3)	C	−4.6
C→D	0.3ℓ (0.3ℓ)	+5.7 (+6.8)	0.2ℓ	−5.3

$K_0=a^4/24\ell$，( ) は $\lambda=0$ としての計算.

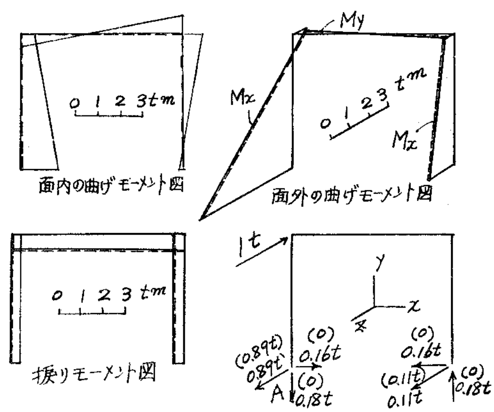
上の図ならびに表より，この計算例の場合にはラーメンの面外のたわみもかなり大きいことがわかる．

4. 計算例 (2)

オ5図のラーメンに対して計算すると曲げモーメント図，支点反力はオ6図のようになる．この場合 M_{zab} は M_{xab} の33%に相当する値となった。もし柱の断面の x, z 軸に対する非対称性を考慮しないときには図示のように全部材の M_z は0となる．またこのラーメンを解くのに仮想仕事式を用いると弾性方程式は6元の，たわみ角法によるときには9元の連立一次方程式となるしかし乍ら実際の労力の点から云えばたわみ角法による方が容易に求めることができる．



オ5図



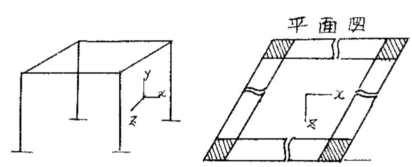
オ6図 (---: λ=0としての計算)

5. 立体ラーメン

各部材のψの相互関係を求むるには次の適合条件を用いる。

$$\left.\begin{aligned}\Delta X&=\Sigma\left[\left(\ell\frac{\Delta L}{L}+mR_z-nR_y\right)L\right],\\ \Delta Y&=\Sigma\left[\left(m\frac{\Delta L}{L}+nR_x-\ell R_z\right)L\right],\\ \Delta Z&=\Sigma\left[\left(n\frac{\Delta L}{L}+\ell R_y-mR_x\right)L\right].\end{aligned}\right\}$$

こゝに L は部材長，ℓ, m, n は部材の方向余弦，$\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ は支点間の相対変位を表わす．オ7図のラーメンの計算結果は当日報告します．



オ7図

参考文献　Shun-ya Yoshida: Analysis of Rigid Frames in Space by Applying Slope-Deflection Formulas, Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu University, No.12, 1961.

草間孝志：非対称曲げをうけるラーメンの一解法，信州大学工学部紀要オ13号　1962.