

I - 21 枝の途中にヒンジを持つ曲線材を含むラーメンの解法 (不完全剛結節点, 刚域, 軸力及びセン断力考慮の場合)

九州大学工学部 正員 山崎 徳也

" " ○南 旭

枝の途中にヒンジを持つ円弧ラーメン枝の軸力及びセン断力考慮のタワミ角式⁽¹⁾を提示したが、更に不完全剛結性、剛域を考慮してタワミ角式を説明する。

(I) 軸力及びセン断力を考慮したタワミ角式

図-1 に示す如く両端の剛域部をそれぞれ (b_{AB}, d_{AB}) , (b_{BA}, d_{BA}) とする。四種の直角座標系 $X-Y$, $\bar{X}-\bar{Y}$, $X'-Y'$, $\bar{X}'-\bar{Y}'$ を定める。

今 $\bar{AA}'=\bar{BB}'=0$ とすれば、先に求めた軸力及びセン断力考慮のタワミ角式⁽¹⁾の説明時のスケルトンと同じく、結果を再記すれば(表-1参照)

$$M_{AB} = 2EK \{ C_1 \theta_A + C_2 \theta_B - (C_1 + C_2)R + C_5 \alpha L \} + C_{AB} \quad \text{但し } K = \frac{I}{L}$$

$$M_{BA} = 2EK \{ C_3 \theta_A + C_4 \theta_B - (C_3 + C_4)R + C_6 \alpha L \} + C_{BA} \quad \text{但し } K = \frac{I}{2AD-BC}$$

$$C_{AB} = \frac{2}{L} KG_a (AD - R^2 C) + \frac{2}{L} KG_{\gamma_1} (AB - R^2 A) + M_{AB}^0$$

M_{AB}^0, M_{BA}^0 は左より右側円弧片持バリの荷重による A, B 点の

$$C_{BA} = -\frac{2}{L} KG_a (bD + R^2 C) + \frac{2}{L} KG_{\gamma_2} (bB + R^2 A) + M_{BA}^0$$

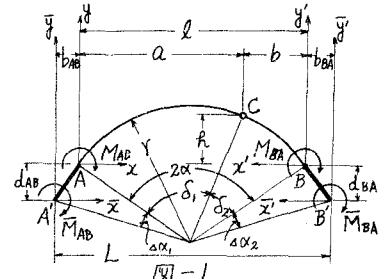
曲げモーメントであり、反時計回りと正とす。

$$C_1 = K \{ a^2 D - R(h + C) + R^2 A \}, \quad C_3 = K \{ a^2 D + R(h - C) - R^2 A \}, \quad C_5 = K \{ AB - R^2 A \}, \quad A = K_1 + K_4 + K_7 + K_{10}, \quad B = K_2 + K_5 + K_8 + K_{11}$$

$$C_2 = K \{ abD + R(bC - b^2) - R^2 A \}, \quad C_4 = K \{ b^2 D + bR(h + C) + R^2 A \}, \quad C_6 = K \{ bB + R^2 A \}, \quad C = K_2 + K_5 - K_8 + K_{12}, \quad D = K_3 + K_6 + K_9 + K_{13}$$

$$G_{\Delta} = M_{AB} + M_{BA} + N_{AB} + N_{BA} - S_{AB} - S_{BA} + R_{AB} + R_{BA}, \quad G_{\gamma} = L_{AB} + L_{BA} + \Pi_{AB} + \Pi_{BA} + F_{AB} + F_{BA} + \Lambda_{AB} + \Lambda_{BA}$$

右表中 $V = \sqrt{\frac{F}{A}}$ (断面二次半径), 表-1



m はボアソン数、 K は断面形状により定まる常数である。

又 $M_o^L, M_o^R, N_o^L, N_o^R, S_o^L, S_o^R$ はそれぞれ左及び右側円弧片持バリにおける載荷時の任意柔モーメント、軸力及びセン断力で、モーメントは下側引張りを、軸力は圧縮を、セン断力は左側上向きを正とする。

曲げモーメントによる項	軸力による項	セン断力による項	軸力による曲率の変化による項
$K_1 \int_{-\alpha}^{\alpha} (a-x)^2 d\varphi$	$K_4 V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi$	$K_7 \frac{2(m+1)KV^2}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi$	$K_{10} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (a-x) \sin \varphi d\varphi$
$K_2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (a-x)(h-y) d\varphi$	$K_5 V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$K_8 \frac{2(m+1)KV^2}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$	$K_{11} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (a-x) \cos \varphi d\varphi$
$K_3 \int_{-\alpha}^{\alpha} (h-y)^2 d\varphi$	$K_6 V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos^2 \varphi d\varphi$	$K_9 \frac{2(m+1)KV^2}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 \varphi d\varphi$	$K_{12} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (h-y) \sin \varphi d\varphi$
$M_{AB} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_o^L (a-x) d\varphi$	$N_{AB} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^L \sin \varphi d\varphi$	$S_{AB} \frac{2(m+1)KV^2}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} S_o^L \cos \varphi d\varphi$	$R_{AB} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^L (a-x) d\varphi$
$M_{BA} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_o^R (a-x) d\varphi$	$N_{BA} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^R \sin \varphi d\varphi$	$S_{BA} \frac{2(m+1)KV^2}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} S_o^R \cos \varphi d\varphi$	$R_{BA} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^R (a-x) d\varphi$
$L_{AB} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_o^L (h-y) d\varphi$	$\Pi_{AB} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^L \cos \varphi d\varphi$	$F_{AB} \frac{2(m+1)KV^2}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} S_o^L \sin \varphi d\varphi$	$\Lambda_{AB} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^L (h-y) d\varphi$
$L_{BA} \int_{-\alpha}^{\alpha} M_o^R (h-y) d\varphi$	$\Pi_{BA} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^R \cos \varphi d\varphi$	$F_{BA} \frac{2(m+1)KV^2}{m} \int_{-\alpha}^{\alpha} S_o^R \sin \varphi d\varphi$	$\Lambda_{BA} V^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} N_o^R (h-y) d\varphi$

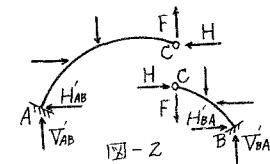
(II) 軸力及びセン断力を加えた不完全剛結性、剛域を考慮したタワミ角式

(1) 刚域を考慮したタワミ角式 図-1 に示す A, B 間のモーメント M_{AB}, M_{BA} と剛域端 A', B' 間のモーメント $\bar{M}_{AB}, \bar{M}_{BA}$ は、 $\bar{AA}' = \bar{BB}' = 0$ の場合より次の如き関係式となる。

$$M_{AB} = \bar{M}_{AB} - F b_{AB} - H d_{AB} + T_{AB}' b_{AB} + H_{AB}' d_{AB} \quad \text{但し } F = \frac{(M_{AB} - M_{AB}^0) + (M_{BA} - M_{BA}^0)}{L}, \quad H = \frac{b(M_{AB} - M_{AB}^0) - a(M_{BA} - M_{BA}^0)}{2h}$$

$$M_{BA} = \bar{M}_{BA} - F b_{BA} + H d_{BA} - T_{BA}' b_{BA} - H_{BA}' d_{BA}$$

F, H は図-2 に示す如く、ヒンジ点 C で切り離した時 C 点に生ずる垂直及び水平反力を、図の向きを正とする。 T_{AB}', H_{AB}' 及び T_{BA}', H_{BA}' はそれぞれ左及び右側円弧片持バリにおける A, B 間の載荷時垂直及び水平反力を、符号は図-2 の向きを正とする。



式(2)を $\bar{M}_{AB}, \bar{M}_{BA}$ について解けば次式を得る。

$$\begin{aligned}\bar{M}_{AB} &= \left(1 + \frac{b_{AB}}{L} + \frac{d_{AB}}{L}\right) M_{AB} + \left(\frac{b_{AB}}{L} - \frac{d_{AB}}{L}\right) M_{BA} - V_{AB}'' b_{AB} - H_{AB}'' d_{AB} \\ \bar{M}_{BA} &= \left(1 + \frac{b_{BA}}{L} + \frac{d_{BA}}{L}\right) M_{BA} + \left(\frac{b_{BA}}{L} - \frac{d_{BA}}{L}\right) M_{AB} + V_{BA}'' b_{BA} + H_{BA}'' d_{BA}\end{aligned}\quad \text{--- (3)}$$

$$V_{AB}' = V_{AB} + \frac{M_{AB}^o + M_{BA}^o}{L}, \quad H_{AB}' = H_{AB} + \frac{bM_{AB}'' - aM_{BA}''}{L}$$

$$V_{BA}' = V_{BA} - \frac{M_{AB}^o + M_{BA}^o}{L}, \quad H_{BA}' = H_{BA} + \frac{bM_{AB}'' - aM_{BA}''}{L}$$

式(3)に式(1)を代入すれば剛域考慮のタワミ角式を得るが、 M_{AB}, M_{BA} 中の R 及び αL はそれら部材AB間の部材角及び弦の伸びで、それをA'B'間の部材角及び弦の伸びに置換するため、 R は $(R - \frac{b_{AB}}{L}\theta_A - \frac{b_{BA}}{L}\theta_B)$ 、 αL は $\alpha L - d_{AB}\theta_A + d_{BA}\theta_B$ として代入する。結果は次の如し。

$$\bar{M}_{AB} = 2EK(\bar{C}_1\theta_A + \bar{C}_2\theta_B - \bar{C}_3R + \bar{C}_4\alpha L) + C'_AB - V_{AB}'' b_{AB} - H_{AB}'' d_{AB} \quad \text{--- (4)}$$

$$\bar{M}_{BA} = 2EK(\bar{C}_4\theta_A + \bar{C}_5\theta_B - \bar{C}_6R + \bar{C}_7\alpha L) + C'_{BA} + V_{BA}'' b_{BA} + H_{BA}'' d_{BA}$$

$$\bar{C}_1 = K\{(a+b_{AB})^2 D - (a+b_{AB})(h+d_{AB})(B+C) + (h+d_{AB})^2 A\}, \quad \bar{C}_2 = K\{(a+b_{AB})(b+b_{BA})D - (b+b_{BA})(h+d_{AB})C + (a+b_{AB})(h+d_{BA})B - (h+d_{AB})(h+d_{BA})A\}$$

$$\bar{C}_4 = K\{(a+b_{AB})^2 D + (a+b_{AB})(h+d_{BA})C - (b+b_{BA})(h+d_{AB})B - (h+d_{AB})(h+d_{BA})A\}, \quad \bar{C}_5 = K\{(b+b_{BA})^2 D + (b+b_{BA})(h+d_{BA})(C+B) + (h+d_{BA})^2 A\}$$

$$\bar{C}_3 = K\{(a+b_{AB})D - (h+d_{AB})LC\}, \quad \bar{C}_6 = K\{(b+b_{BA})D + (h+d_{BA})LC\}, \quad \bar{C}_7 = K\{(a+b_{AB})B - (h+d_{AB})A\}, \quad \bar{C}_8 = K\{(b+b_{BA})B + (h+d_{BA})A\}$$

又材端モーメントは次の如く表わす。

$$\begin{aligned}\bar{M}_{AB} &= F(a+b_{AB}) + H(h+d_{AB}) + \bar{M}_{AB}^o \\ \bar{M}_{BA} &= F(b+b_{BA}) - H(h+d_{BA}) + \bar{M}_{BA}^o\end{aligned}\quad \text{--- (5)}$$

$$F = \frac{(h+d_{AB})(\bar{M}_{AB} - \bar{M}_{AB}^o) + (h+d_{AB})(\bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BA}^o)}{(a+b_{AB})(h+d_{AB}) + (b+b_{BA})(h+d_{AB})} \quad \text{--- (6)}$$

$$H = \frac{(b+b_{BA})(\bar{M}_{AB} - \bar{M}_{AB}^o) - (a+b_{AB})(\bar{M}_{BA} - \bar{M}_{BA}^o)}{(a+b_{AB})(h+d_{AB}) + (b+b_{BA})(h+d_{AB})}$$

式(4)が軸力、せん断力及び剛域考慮のタワミ角式であり、式(6)を併用する。

(2) (II)-(1)に加えて不完全剛結性を考慮したタワミ角式

式(3)を連立して解けば、不完全剛結節点が存在するA,B両点のモーメントが次の如くえられる。

$$M_{AB} = p_1 \bar{M}_{AB} + p_2 \bar{M}_{BA} + p_3 (V_{AB}'' b_{AB} + H_{AB}'' d_{AB}) - g_1 (V_{AB}'' b_{BA} + H_{AB}'' d_{BA}), \quad M_{BA} = p_2 \bar{M}_{AB} + g_2 \bar{M}_{BA} + p_3 (V_{BA}'' b_{BA} + H_{BA}'' d_{BA}) - g_2 (V_{BA}'' b_{AB} + H_{BA}'' d_{AB}) \quad \text{--- (7)}$$

式(4)の θ_A, θ_B の代りに $\theta_A - \gamma_{AB}(M_{AB}), \theta_B - \gamma_{BA}(M_{BA})$ を代入し、更に式(7)を用い、 $ZEK\gamma_{AB} = \alpha, ZEK\gamma_{BA} = \beta$ と置き換え、 $\bar{M}_{AB}, \bar{M}_{BA}$ について連立して解けば、A,B両点の不完全剛結性が導入された次の結果を得る。

$$\bar{M}_{AB} = 2EK(m_1\theta_A + m_2\theta_B - m_3R + m_4\alpha L) + m_5C'_AB - m_6C'_BA - V_{AB}'' b_{AB} - H_{AB}'' d_{AB} \quad \text{--- (8)} \quad (\text{表-Z.3 参照})$$

$$\bar{M}_{BA} = 2EK(n_1\theta_A + n_2\theta_B - n_3R + n_4\alpha L) + n_5C'_{BA} - n_6C'_AB + V_{BA}'' b_{BA} + H_{BA}'' d_{BA}$$

表-Z

式(8)及び(6)が軸力、せん断力、剛域及び不完全剛結性考慮のタワミ角式である。

(III) 解法

完全、不完全剛結を問

せず、又剛域がある場合も途中にシグマを含むラーメンの解法では、そのままにしてそれでそのタワミ角式を用いる。他には通常の曲線材ラーメンと全く同様に取扱えばよい。

表-3

$p_1, a(h+d_{AB}) + h(b+b_{BA})$	$m_1, \bar{C}_1 + (\bar{C}_1\bar{C}_5 - \bar{C}_2\bar{C}_4)g_2\beta$	$n_1, \bar{C}_4 + (\bar{C}_2\bar{C}_4 - \bar{C}_1\bar{C}_5)p_2\beta$
$p_2, b_{BA} - h_{BA}$	$m_2, \bar{C}_5 + (\bar{C}_2\bar{C}_4 - \bar{C}_1\bar{C}_5)g_1\alpha$	$n_2, \bar{C}_5 + (\bar{C}_2\bar{C}_4 - \bar{C}_1\bar{C}_5)p_1\alpha$
$g_1, a_dAB - h_{AB}$	$m_3, \bar{C}_3 + (\bar{C}_3\bar{C}_4 - \bar{C}_2\bar{C}_5)g_1x + (\bar{C}_3\bar{C}_5 - \bar{C}_2\bar{C}_4)g_2\beta$	$n_3, \bar{C}_6 + (\bar{C}_3\bar{C}_6 - \bar{C}_2\bar{C}_5)p_1x + (\bar{C}_3\bar{C}_6 - \bar{C}_2\bar{C}_5)p_2\beta$
$g_2, b(h+d_{AB}) + h(a+b_{AB})$	$m_4, \bar{C}_7 + (\bar{C}_4\bar{C}_7 - \bar{C}_3\bar{C}_6)g_1x + (\bar{C}_5\bar{C}_7 - \bar{C}_2\bar{C}_6)g_2\beta$	$n_4, \bar{C}_8 + (\bar{C}_4\bar{C}_8 - \bar{C}_3\bar{C}_7)p_1x + (\bar{C}_2\bar{C}_8 - \bar{C}_3\bar{C}_7)p_2\beta$
$g = (a+b_{AB})(h+d_{AB}) + (b+b_{BA})(h+d_{AB})$	$m_5, 1 + \bar{C}_4g_2\alpha + \bar{C}_2g_2\beta$	$n_5, 1 + \bar{C}_1p_1\alpha + \bar{C}_2p_2\beta$
	$m_6, \bar{C}_1g_1\alpha + \bar{C}_2g_2\beta$	$n_6, \bar{C}_4p_1\alpha + \bar{C}_5p_2\beta$
	$p = 1 + (\bar{C}_1p_1 + \bar{C}_2g_1) + (\bar{C}_2p_2 + \bar{C}_3g_2) + (\bar{C}_1\bar{C}_5 - \bar{C}_2\bar{C}_4)(p_2g_2 - p_1g_1)\alpha\beta$	

参考文献

(1) 山崎, 南; "軸力とせん断力を考慮した集中ヒンジを持つ円筒材のタワミ角式" 土木学会第37年度土木学会西日本研究発表会論文集 昭和37年2月
山崎徳也; "斜材の途中ヒンジを持つ曲線材を含むラーメンの解法" 土木学会第17回年次学術講演会概要 昭和37年5月

T.Yamasaki; "Analysis of Frames with Curved Members Considering the Effects of Axial and Shearing Forces" Proc. 11th Japan Natl. Congr. Appl. Mech. March, 1962