

I-20 振動撓角式による立体直線材ラ-メ、の固有週期算定法

九州大学工学部 正員 山崎 徳也

" 太田 俊昭

K.K. 大林組 " 〇 毛 利 俊 雄

[序言] 節莫の不完全剛結性と剛域とは直線材ラ-メンの振動週期に著しい影響を与える。本研究は振動撓角式を用いて、これら要素を考慮した場合の週期算定を可能にしたものであるが平面的のみならず更に振動撓角式を併用して立体ラ-メンの解析にも及ぶ。

[I] 基本式の誘導

(1) 不完全剛結性と剛域とを考慮した振動撓角式

等断面材の振動撓角式は次式で表わされる。(図-1a)

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 2EK \left\{ k_1 \theta_A + k_2 \theta_B + k_3 \left(\frac{\Delta_A}{l} \right) - k_4 \left(\frac{\Delta_B}{l} \right) \right\} \\ M_{BA} &= 2EK \left\{ k_1 \theta_A + k_2 \theta_B + k_3 \left(\frac{\Delta_A}{l} \right) - k_4 \left(\frac{\Delta_B}{l} \right) \right\} \\ -l S_{AB} &= 2EK \left\{ k_5 \theta_A + k_6 \theta_B + k_7 \left(\frac{\Delta_A}{l} \right) - k_8 \left(\frac{\Delta_B}{l} \right) \right\} \\ -l S_{BA} &= 2EK \left\{ k_5 \theta_A + k_6 \theta_B + k_7 \left(\frac{\Delta_A}{l} \right) - k_8 \left(\frac{\Delta_B}{l} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \text{--- (1)}$$

(2) 不完全剛結性の導入 (図-1b)

$$\left. \begin{aligned} \theta_A' &= \theta_A - r_{AB} M_{AB} \\ \theta_B' &= \theta_B - r_{BA} M_{BA} \end{aligned} \right\} \text{--- (2)} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= 2EK r_{AB} \\ \beta &= 2EK r_{BA} \end{aligned} \right\} \text{--- (3)}$$

(3) 剛域の条件 (図-1c, d)

剛域中心のモーメント及びせん断力を $\bar{M}, \bar{S}$ で表せば

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{AB} &= M_{AB} - b_A S_{AB} \\ \bar{M}_{BA} &= M_{BA} - b_B S_{BA} \end{aligned} \right\} \text{--- (4)} \quad \left. \begin{aligned} \bar{\Delta}_A &= \Delta_A - b_A \theta_A \\ \bar{\Delta}_B &= \Delta_B + b_B \theta_B \end{aligned} \right\} \text{--- (5)}$$

以上の(1)~(5)式より不完全剛結性と剛域を考慮した振動撓角式が次式の如く表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{AB} &= 2EK \left\{ D_{AA} \theta_A + D_{AB} \theta_B + E_{AA} \left(\frac{\bar{\Delta}_A}{l} \right) - E_{AB} \left(\frac{\bar{\Delta}_B}{l} \right) \right\} \\ \bar{M}_{BA} &= 2EK \left\{ D_{BA} \theta_A + D_{BB} \theta_B + E_{BA} \left(\frac{\bar{\Delta}_A}{l} \right) - E_{AB} \left(\frac{\bar{\Delta}_B}{l} \right) \right\} \\ -l \bar{S}_{AB} &= 2EK \left\{ F_{AA} \theta_A + F_{AB} \theta_B + G_{AA} \left(\frac{\bar{\Delta}_A}{l} \right) - G_{AB} \left(\frac{\bar{\Delta}_B}{l} \right) \right\} \\ -l \bar{S}_{BA} &= 2EK \left\{ F_{BA} \theta_A + F_{BB} \theta_B + G_{BA} \left(\frac{\bar{\Delta}_A}{l} \right) - G_{BB} \left(\frac{\bar{\Delta}_B}{l} \right) \right\} \end{aligned} \right\}$$

但し

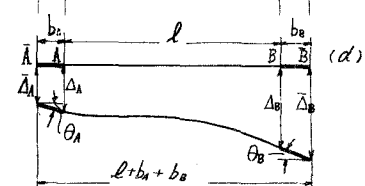
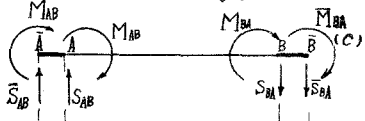
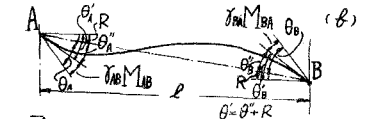
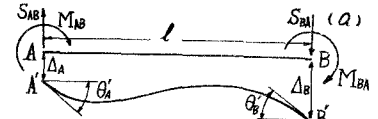
$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{(\lambda l)^2 (\sin \lambda l \cosh \lambda l - \cos \lambda l \sinh \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)}, & k_2 &= \frac{(\lambda l)^2 (\sinh \lambda l - \sin \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)} \\ k_3 &= \frac{(\lambda l)^2 (\sin \lambda l \sinh \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)}, & k_4 &= \frac{(\lambda l)^2 (\cosh \lambda l - \cos \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)} \\ k_5 &= \frac{(\lambda l)^2 (\sin \lambda l \cosh \lambda l + \cos \lambda l \sinh \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)}, & k_6 &= \frac{(\lambda l)^2 (\sinh \lambda l + \sin \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)} \\ k_7 &= \frac{(\lambda l)^2 (1 + \cosh \lambda l \cosh \lambda l)}{4(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)}, & k_8 &= \frac{(\lambda l)^2 (\cosh \lambda l + \cos \lambda l)}{4(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)} \\ X_I &= \frac{(\lambda l)^2 (\cosh \lambda l \cosh \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)}, & X_{II} &= -\frac{(\lambda l)^2 \cosh \lambda l}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)} \\ X_{III} &= \frac{(\lambda l)^2 (\cosh \lambda l \cosh \lambda l)}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)}, & X_{IV} &= -\frac{(\lambda l)^2 \sinh \lambda l}{2(1 - \cosh \lambda l \cosh \lambda l)} \\ X_V &= \frac{1}{2} (\lambda l)^2 k_2, & P_0 &= 1 + (\alpha + \beta) k_1 + \alpha \beta k_3 \end{aligned} \right\}$$

(2) 振動撓角式の誘導 (等断面) (図-2参照)

振り振動に関する微分方程式

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \text{--- (6)} \quad \text{---} \quad C^2 = \frac{GJ}{\rho I_p}$$

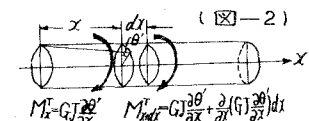
但し GJ : 振り剛性 ρ : 密度 I_p : 極慣性モーメント



(図-1)

D_{AA}	$(k_1 + \beta k_3) + 2(k_2 + \frac{\beta}{2} k_4 \frac{b_A}{l}) + (k_5 + \alpha k_1 + \beta k_3 + \frac{\alpha \beta}{2} k_7 \frac{b_A b_B}{l^2})$	E_{AB}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$
D_{AB}	$k_2 + (k_4 + \frac{\alpha}{2} k_1 \frac{b_A}{l}) + (k_5 + \frac{\beta}{2} k_3 \frac{b_B}{l}) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$	E_{BA}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$
D_{BA}	$k_2 + (k_4 + \frac{\alpha}{2} k_1 \frac{b_A}{l}) + (k_5 + \frac{\beta}{2} k_3 \frac{b_B}{l}) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$	E_{BB}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$
D_{BB}	$(k_1 + \alpha k_3) + 2(k_2 + \frac{\alpha}{2} k_4 \frac{b_B}{l}) + (k_5 + \beta k_1 + \alpha k_3 + \frac{\alpha \beta}{2} k_7 \frac{b_A b_B}{l^2})$	E_{AB}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$
E_{AA}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$	E_{BB}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$
F_{AA}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$	F_{AB}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$
F_{BA}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$	F_{BB}	$(k_5 + \frac{\beta}{2} k_3) + (k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{\alpha \beta}{2} k_9 \frac{b_A b_B}{l^2})$
G_{AA}	$k_5 + \alpha k_1 + \beta k_3 + \frac{1}{2} \alpha \beta k_7$	G_{AB}	$k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{1}{2} \alpha \beta k_9$
G_{BA}	$k_6 + (\alpha + \beta) k_8 + \frac{1}{2} \alpha \beta k_9$	G_{BB}	$k_5 + \beta k_1 + \alpha k_3 + \frac{1}{2} \alpha \beta k_7$
$k_1: P_0$		$k_2: P_0$	

(表-1)



(図-2)

(6)式を基準函数 X を用いて解けば $X = C_1 \cos \tau X + C_2 \sin \tau X$ ----- (7)

境界条件として $\left. \begin{aligned} \theta_A = X(x=0) \quad M_{AB}^I &= GJ \frac{\partial X}{\partial x}(x=0) \\ \theta_B = X(x=l) \quad M_{BA}^I &= GJ \frac{\partial X}{\partial x}(x=l) \end{aligned} \right\}$ ----- (8)

(7)(8)式より次の振動振角式をうる。

$$\begin{aligned} M_{AB}^I &= \frac{GJ}{l} \{ l_1^T \theta_A + l_2^T \theta_B \} \\ M_{BA}^I &= \frac{GJ}{l} \{ l_3^T \theta_A + l_4^T \theta_B \} \end{aligned} \quad \text{但し} \quad \begin{cases} l_1^T = (\tau l) \cot \tau l \\ l_2^T = -(\tau l) \operatorname{cosec} \tau l \end{cases}$$

II 平面ラーメンの固有周期

(1) 不完全剛結特性を考慮のため 図-3 の如き片持梁を例にとる。

モーメント及びせん断力の釣合式: $M_{BA} = 0, S_{BA} = 0$

境界条件 ($\theta_A = \Delta_A = b_A = 0, b_B = \beta = 0$) を考慮すれば次の

周期方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} l_1 + \alpha l_3 & l_2 + \frac{1}{2} \alpha l_4 \\ l_3 + \frac{1}{2} \alpha l_4 & l_4 + \alpha l_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{----- (9)}$$

(9)式より α, l, τ と p の関係を示せば 図-3 の如くなる。

(2) 不完全剛結性及剛域の影響をみるため 図-4 の如き門形ラーメンを取扱う。

節点方程式: $M_{BA} + M_{BC} = 0, M_{CB} + M_{CD} = 0$

層方程式: $S_{BA} + S_{CB} + f = 0$

ここに $f = -p^2 m \Delta$: 慣性力, m は質量, Δ は変位

$$(10) \text{式を解けば} \begin{bmatrix} (D_{BB}bb + \frac{K_1}{K_2}(D_{AB})_b) & \frac{K_1}{K_2}(D_{AB})_b & (E_{BB})_b \\ \frac{K_1}{K_2}(D_{AB})_b & (D_{BB}bb + \frac{K_1}{K_2}(D_{AB})_b) & (E_{BB})_b \\ (F_{BB}bb) & (F_{BB})_b & X \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{ここに } X = -(G_{BB}bb + (G_{BB})_b) + \frac{p^2}{2EK} p^2$$

上式の計算結果を図-4に示す。

III 立体ラーメンの振動: 図-5の如き立体直線ラーメンの乙方向に加

速度 a を受ける場合の固有周期を算定する。(但し θ 及 M は負軸に方向を

持ちを正とする。) ラーメンの対称性を考慮して節点方程式と端力方程式を立てれば

$$M_{ABD} + M_{ABF} + M_{BA}^I + M_{BC}^I = 0$$

$$M_{CFH} + M_{CFB} + M_{FE}^I + M_{FG}^I = 0$$

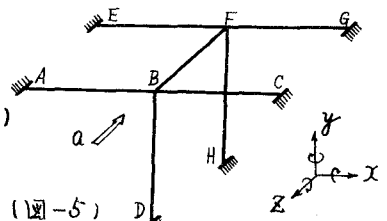
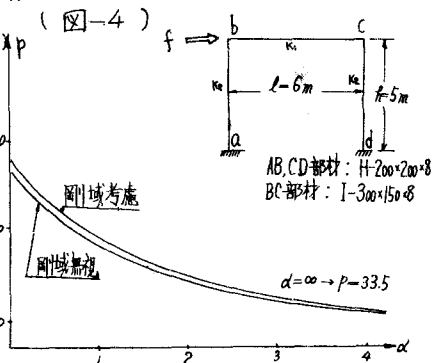
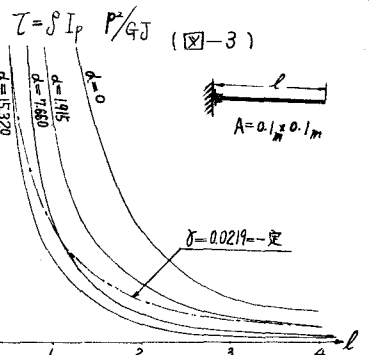
$$S_{EBA} + S_{EFB} - S_{EBC} - S_{EFG} + S_{EBD} + S_{EFH} = p^2 A L \Delta_{BZ}$$

(11)式に境界条件を考慮すれば周期方程式は

$$\begin{bmatrix} 2l_1 + \frac{GJ}{EI} l_1^T & l_2 & l_3 \\ l_2 & 2l_1 + \frac{GJ}{EI} l_1^T & l_3 \\ l_3 & l_3 & 6l_5 - \frac{p^2 A L^2}{2EI} p^2 \end{bmatrix} = 0$$

この式より $p = 4.987 \text{ cycle} / 2\pi \text{ sec}$

尚 不完全剛結性及剛域を考慮する場合は平面ラーメンに準じてモーメント・せん断力に夫々適応した式を用いればよい。



(図-5)

[参考文献] (1) 小野薫; "振動境角法と其の实用化" 建築学会大会論文集, 昭和12年3月。

(2) G. L. Rogers, "Dynamics of Framed Structures" 1959, John Wiley & Sons.

(3) T. Yamazaki "Analysis of Semi-Rigid Frame with Curved Members considering the Effect of Rigid Joint-Width", Proc. of the 12th Japan Nat. Cong. for Appl. Mech. 1962