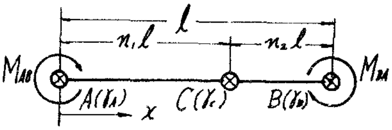
I－19　途中に不完全剛結節点をもつ直線材ラーメンの解法

九州大学工学部　正員　山崎　徳也
〃　　〃　南　　旭
〃　　〃　○瀬川　宗亮

従来の構造解析に於ては部材の途中に結合部(継目)があっても剛結又はヒンヂとして解析を行って来た。しかるに鋼構造の結合部はヒンヂは別として一般に不完全剛結と見做すべきものが多くそれが材端モーメントに及ぼす影響を見逃す事は出来ない。又不完全剛結特性を利用することにより部材のモーメント分布を任意に調節することが出来経済設計への一つの手段となり得る。本研究は途中に不完全剛結点をもつ直線材を対象とし更に剛域をも考慮したタワミ角式を誘導したもので特例として途中にヒンヂをもつ直線材タワミ角式[1]が導かれる。

〔I〕材端及び途中に不完全剛結点をもつ材のタワミ角式



図—1

図－1に於てA,B及びC点が不完全剛結点とする。任意点の曲げモーメントは次の如く表わされる。

$$M_x = M_{AB}(l-x)/l - M_{BA}x/l + M_0^x \quad \text{-----}(1)$$

ここにM_{AB},M_{BA}はA,B両点の端モーメントで右廻りを正としM_0^xは単純梁ABの荷重による任意点の曲げモーメントで下側引張りを正とする。C点の曲げモーメントをM_cとすれば式(1)より，$M_c = M_{AB}n_2 - M_{BA}n_1 + M_0^c$　となる。このM_cによりC点は$\gamma_c M_c$だけ口を開く為A点は$(\gamma_c M_c n_2)$B点は$(-\gamma_c M_c n_1)$だけ回転する。(時計廻りを正とする)。A,B両点も不完全剛結である為各々$(\gamma_A M_{AB})(\gamma_B M_{BA})$だけ更に回転する。故に　$\tau_A = \tau_{A0} + \gamma_c M_c n_2 + \gamma_A M_{AB}$，　$\tau_B = \tau_{B0} - \gamma_c M_c n_1 + \gamma_B M_{BA}$ ----(2)

又 $\tau_{A0} = \dfrac{\partial W}{\partial M_{AB}} = \displaystyle\int_0^l \frac{M_x}{EI}\frac{l-x}{l}dx = \frac{1}{EI}\left\{\frac{l}{6}(2M_{AB}-M_{BA}) + K_1\right\}$，$\tau_{B0} = \dfrac{\partial W}{\partial M_{BA}} = -\displaystyle\int_0^l \frac{M_x}{EI}\frac{x}{l}dx = \frac{-1}{EI}\left\{\frac{l}{6}(M_{AB}-2M_{BA}) + K_2\right\}$ ----(3)

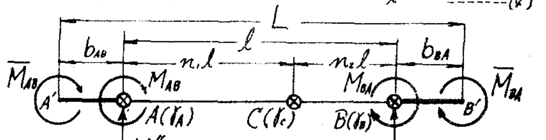
であるから式(3)を式(2)に代入し，$\tau_A = \theta_A - R$，　$\tau_B = \theta_B - R$，　$2EK\gamma = \alpha$ と置きM_{AB},M_{BA}を連立に解けば求めるタワミ角式を得る。結果は次の如し。

$$M_{AB} = \frac{1}{p}\Big[2EK\{(2+3\alpha_B+3\alpha_c n_1^2)\theta_A + (1+3\alpha_c n_1 n_2)\theta_B - 3(1+\alpha_B+\alpha_c n_1)R\}$$
$$-\frac{2}{l}\{(2+3\alpha_B+3\alpha_c n_1^2)K_1 - (1+3\alpha_c n_1 n_2)K_2\} - (2n_2 - n_1 + 3\alpha_B n_2)\alpha_c M_0^c\Big]$$

$$M_{BA} = \frac{1}{p}\Big[2EK\{(1+3\alpha_c n_1 n_2)\theta_A + (2+3\alpha_A+3\alpha_c n_2^2)\theta_B - 3(1+\alpha_A+\alpha_c n_2)R\}$$
$$+\frac{2}{l}\{(2+3\alpha_A+3\alpha_c n_2^2)K_2 - (1+3\alpha_c n_1 n_2)K_1\} + (2n_1 - n_2 + 3\alpha_A n_1)\alpha_c M_0^c\Big]$$

ここに，$p = 1 + 2\{\alpha_A + \alpha_B + \alpha_c(1-3n_1 n_2)\} + 3\{\alpha_A\alpha_B + \alpha_c(\alpha_A n_1^2 + \alpha_B n_2^2)\}$，$K_1 = \frac{1}{l}\int_0^l M_0^x(l-x)dx$，$K_2 = \frac{1}{l}\int_0^l M_0^x x\,dx$ ------(4)

〔II〕上記〔I〕に剛域を考慮したタワミ角式

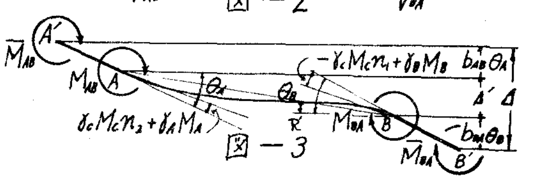


図—2

図－2に示す如く$\overline{AA'} = b_{AB}$，$\overline{BB'} = b_{BA}$，を剛域とすれば次の関係式が成立つ。

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_{AB} &= M_{AB} + (M_{AB}+M_{BA})b_{AB}/l + V''_{AB}b_{AB}\\ \overline{M}_{BA} &= M_{BA} + (M_{AB}+M_{BA})b_{BA}/l - V''_{BA}b_{BA}\end{aligned}\right\} \text{------}(5)$$

V''_{AB},V''_{BA}は荷重による単純梁ABのA,B両端の垂直反力で図－2に示す向きを正とする。



図—3

剛域端モーメント$\overline{M}_{AB}$,$\overline{M}_{BA}$は式(5)に式(4)を代入

すれば得られる。但し,式(4)中の R は図－3に示す如く $R'=\Delta'/\ell$ である。ここで剛域考慮の部材角を $R=\Delta/\ell$ と定義する故 $\Delta'/\ell=\Delta/\ell-\theta_A\cdot b_{AB}/\ell-\theta_B\cdot b_{BA}/\ell$ なる関係を用いて,式(4)中の R を $(R-\theta_A\cdot b_{AB}/\ell-\theta_B\cdot b_{BA}/\ell)$ に置き換えて代入することが必要となる。結果は次の如し。(表-1参照)

$$\overline{M}_{AB}=\frac{3}{p}\Big\{2EK(D_{AA}\theta_A+D_{AB}\theta_B-D_{AC}R)-\frac{2}{\ell}(F_{AA}\mathbb{K}_1-F_{AB}\mathbb{K}_2)-(F_{AA}n_2-F_{AB}n_1)\alpha_c M_0^c\Big\}-b_{AB}V''_{AB}$$

$$\overline{M}_{BA}=\frac{3}{p}\Big\{2EK(D_{BA}\theta_A+D_{BB}\theta_B-D_{BC}R)+\frac{2}{\ell}(F_{BB}\mathbb{K}_2-F_{BA}\mathbb{K}_1)+(F_{BB}n_1-F_{BA}n_2)\alpha_c M_0^c\Big\}+b_{BA}V''_{BA} \quad \text{-----}(6)$$

表-1　ここに $\kappa_1=b_{AB}/\ell$, $\kappa_2=b_{BA}/\ell$

D_{AA}	$(2/3+\alpha_B+\alpha_c n_1^2)+2(1+\alpha_B+\alpha_c n_1)\kappa_1+(2+\alpha_A+\alpha_B+\alpha_c)\kappa_1^2$
D_{BB}	$(2/3+\alpha_A+\alpha_c n_2^2)+2(1+\alpha_A+\alpha_c n_2)\kappa_2+(2+\alpha_A+\alpha_B+\alpha_c)\kappa_2^2$
$D_{AB}=D_{BA}$	$(1/3+\alpha_c n_1 n_2)+(1+\alpha_A+\alpha_c n_2)\kappa_1+(1+\alpha_B+\alpha_c n_1)\kappa_2+(2+\alpha_A+\alpha_B+\alpha_c)\kappa_1\kappa_2$
D_{AC}	$(1+\alpha_B+\alpha_c n_1)+(2+\alpha_A+\alpha_B+\alpha_c)\kappa_1$
D_{BC}	$(1+\alpha_A+\alpha_c n_2)+(2+\alpha_A+\alpha_B+\alpha_c)\kappa_2$
F_{AA}	$(2/3+\alpha_B+\alpha_c n_1^2)+(1+\alpha_B+\alpha_c n_1)\kappa_1$
F_{BB}	$(2/3+\alpha_A+\alpha_c n_2^2)+(1+\alpha_A+\alpha_c n_2)\kappa_2$
F_{AB}	$(1/3+\alpha_c n_1 n_2)+(1+\alpha_A+\alpha_c n_2)\kappa_1$
F_{BA}	$(1/3+\alpha_c n_1 n_2)+(1+\alpha_B+\alpha_c n_1)\kappa_2$

［Ⅲ］途中にヒンヂをもつ直線材タワミ角式

図－2の $\gamma_c\to\infty$ で点Cはヒンヂとなり,式(6)の各係数の極限値を求めれば,次の結果を得る。

$$\overline{M}_{AB}=\frac{1}{p'}\Big[2EK(n_1+\kappa_1)\{(n_1+\kappa_1)\theta_A+(n_2+\kappa_2)\theta_B-R\}-\frac{2}{\ell}(n_1+\kappa_1)(n_1\mathbb{K}_1-n_2\mathbb{K}_2)+M_0^c\{1/3-n_2(1+\alpha_B)+n_1(1+\alpha_A)\kappa_1-n_2(1+\alpha_B)\kappa_1\}\Big]-b_{AB}V''_{AB}$$

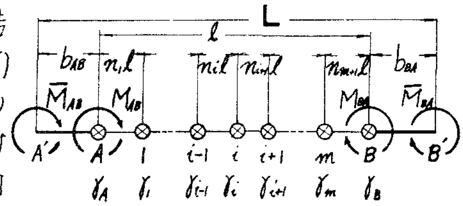
$$\overline{M}_{BA}=\frac{1}{p'}\Big[2EK(n_2+\kappa_2)\{(n_1+\kappa_1)\theta_A+(n_2+\kappa_2)\theta_B-R\}+\frac{2}{\ell}(n_2+\kappa_2)(n_2\mathbb{K}_2-n_1\mathbb{K}_1)-M_0^c\{1/3-n_1(1+\alpha_A)-n_1(1+\alpha_A)\kappa_2+n_2(1+\alpha_B)\kappa_2\}\Big]+b_{BA}V''_{BA}$$

但し, $p'=\frac{2}{3}(1-3n_1n_2)+(\alpha_A n_1^2+\alpha_B n_2^2)$　-----(7)

［Ⅳ］部材ABの両端及び途中に m ヶの不完全剛結節点をもち,剛域をも考慮したタワミ角式(図-4参照)

i 点のモーメントは, $M_i=M_{AB}\sum_{m=i+1}^{m+1}n_m-M_{BA}\sum_{m=1}^{i}n_m+M_0^i$ -----(8)

この M_i により i 点は $\gamma_i M_i$ だけ口を開くため,A点では $(\gamma_i M_i\sum_{m=i+1}^{m+1}n_m)$, B点では $(-\gamma_i M_i\sum_{m=1}^{i}n_m)$ だけ回転する。更に両端の不完全剛結効果 $(\gamma_A M_{AB})$, $(\gamma_B M_{BA})$ を加味して,



図－4　$1\leqq i\leqq m$

$$\tau_A=\tau_{A0}+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i M_i\sum_{m=i+1}^{m+1}n_m+\gamma_A M_{AB},\quad \tau_B=\tau_{B0}-\sum_{i=1}^{m}\gamma_i M_i\sum_{m=1}^{i}n_m+\gamma_B M_{BA} \quad \text{----}(9)$$

式(9)に式(8),式(3)を代入し, M_{AB}, M_{BA} について連立に解き,更に式(5)に代入すれば目的の $\overline{M}_{AB}$, $\overline{M}_{BA}$ を得る。結果は次の如し。(表-2参照)　但し, $\sum=\sum_{i=1}^{m}$, $\sigma_1=\sum_{m=1}^{i}n_m$, $\sigma_2=\sum_{m=i+1}^{m+1}n_m$, $2EK\gamma_i=\alpha_i$

$$\left.\begin{aligned}\overline{M}_{AB}&=\frac{1}{p}\Big\{2EK(D_{AA}\theta_A+D_{AB}\theta_B-D_{AC}R)-\frac{2}{\ell}(F_{AA}\mathbb{K}_1-F_{AB}\mathbb{K}_2)-(F_{AA}\sum\alpha_i M_0^i\sigma_2-F_{AB}\sum\alpha_i M_0^i\sigma_1)\Big\}-b_{AB}V''_{AB}\\ \overline{M}_{BA}&=\frac{1}{p}\Big\{2EK(D_{BA}\theta_A+D_{BB}\theta_B-D_{BC}R)+\frac{2}{\ell}(F_{BB}\mathbb{K}_2-F_{BA}\mathbb{K}_1)+(F_{BB}\sum\alpha_i M_0^i\sigma_1-F_{BA}\sum\alpha_i M_0^i\sigma_2)\Big\}+b_{BA}V''_{BA}\end{aligned}\right\}\text{---}(10)$$

表-2

D_{AA}	$(2/3+\alpha_B+\sum\alpha_i\sigma_1^2)+2(1+\alpha_B+\sum\alpha_i\sigma_1)\kappa_1+(2+\alpha_A+\alpha_B+\sum\alpha_i)\kappa_1^2$	$D_{AB}=D_{BA}$	$(1/3+\sum\alpha_i\sigma_1\sigma_2)+(1+\alpha_A+\sum\alpha_i\sigma_2)\kappa_1+(1+\alpha_B+\sum\alpha_i\sigma_1)\kappa_2+(2+\alpha_A+\alpha_B+\sum\alpha_i)\kappa_1\kappa_2$
D_{BB}	$(2/3+\alpha_A+\sum\alpha_i\sigma_2^2)+2(1+\alpha_A+\sum\alpha_i\sigma_2)\kappa_2+(2+\alpha_A+\alpha_B+\sum\alpha_i)\kappa_2^2$		
D_{AC}	$(1+\alpha_B+\sum\alpha_i\sigma_1)+(2+\alpha_A+\alpha_B+\sum\alpha_i)\kappa_1$	D_{BC}	$(1+\alpha_A+\sum\alpha_i\sigma_2)+(2+\alpha_A+\alpha_B+\sum\alpha_i)\kappa_2$
F_{AA}	$(2/3+\alpha_B+\sum\alpha_i\sigma_1^2)+(1+\alpha_B+\sum\alpha_i\sigma_1)\kappa_1$	F_{AB}	$(1/3+\sum\alpha_i\sigma_1\sigma_2)+(1+\alpha_A+\sum\alpha_i\sigma_2)\kappa_1$
F_{BB}	$(2/3+\alpha_A+\sum\alpha_i\sigma_2^2)+(1+\alpha_A+\sum\alpha_i\sigma_2)\kappa_2$	F_{BA}	$(1/3+\sum\alpha_i\sigma_1\sigma_2)+(1+\alpha_B+\sum\alpha_i\sigma_1)\kappa_2$
p	$1/3+2/3\cdot\{\alpha_A+\alpha_B+\sum\alpha_i(1-3\sigma_1\sigma_2)\}+\{\alpha_A\alpha_B+\alpha_A\sum\alpha_i\sigma_1^2+\alpha_B\sum\alpha_i\sigma_2^2+\sum\alpha_i\sigma_1^2\sum\alpha_i\sigma_2^2-(\sum\alpha_i\sigma_1\sigma_2)^2\}$		

文献) (1) 山崎徳也;"部材の途中にヒンヂを持つ曲線材を含むラーメンの解法" 土木学会第17回年次学術講演会概要 昭和37年5月
二見秀雄;"材の途中にピン接合点を有するラーメン材の算式とその応用" 建築学会大会論文集 昭和15年4月