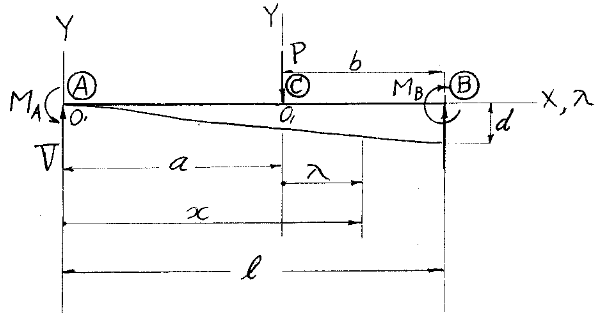
I－1 Castigliano の仕事式における要注意点について

極東設計事務所　正員　石川時信



要旨 カスチリアの仕事式は古くから[1]，

i　弾性体に働く外力が，これに弾性変形を与える場合に，外力の方向に起る変位は，その弾性体内になされたる内部仕事を，その外力について1回微分したるものに等しい。

ii　それ自身が仕事をなさざる如くに選ばれたる不静定力について，その内部仕事を1回偏微分したるものは零に等しい。

というように伝え教えられ，それを図示の記号に従い，式によりて書けば，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial V} = \displaystyle\int_0^{l} \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial V} dx = d & \cdots\cdots (1) \\ \dfrac{\partial W}{\partial M_A} = \displaystyle\int_0^{l} \frac{M}{EI} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_A} dx = 0 & \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

ただし，E は弾性係数，I は断面二次率，となるが，その表現は誤謬に陥り易く，寧ろ，梁に関するモールの法則の一面として表現しておく方がよいと述べたものである。

表現文字について

前掲(ii)中における，不静定力とゆう字は，式(2)においては，M_A のことにして，この文字は力にあらずして，曲げであり，若し，$X_1, X_2, X_3, \cdots\cdots$ とゆうように只外力として表現すると大きな誤謬に陥り易い。なんとならば，曲げがなす変位は廻転角にして，変位とは性格が異い，梁端條件に合致し難いからである。

偏微分係数が零の場合

前掲の(ii)は，式(2)と同様廻転角を表はすが，梁端が鉸端の場合は $\frac{\partial M}{\partial M_A} = 0$ で，実際と合はない。

このような不合理をなくするために，$M = M_A + Vx - P\lambda$ とすれば，$\frac{\partial M}{\partial V} = x$，$\frac{\partial V}{\partial M_A} = -\frac{1}{x}$，$\frac{\partial M}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial M_A} = x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$，$\frac{\partial M}{\partial M_A} = \frac{\partial M}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial M_A} = -1$ より，式(2)は，

$$\frac{\partial W}{\partial M_A} = -\int_0^{l} \frac{M}{EI} dx \quad \cdots\cdots (3)$$

となりて，梁の微分方程式と一致する。

また，前掲(i)も $M = M_A + Vx - P\lambda$ とすれば，$\frac{\partial M}{\partial M_A} = 0$ となりて，$\frac{\partial M}{\partial V} = \frac{\partial M}{\partial M_A} \cdot \frac{\partial M_A}{\partial V} = 0$ 従って式(1)も成立しないから，$M_A + Vl - Pb + M_B = 0$，なる静力学的條件式より，$\begin{cases} M_A = -Vl - M_B + Pb \\ V = -\frac{1}{l}(M_A + M_B) + \frac{b}{l}P \end{cases}$ なるものを M の式に代入し，$\begin{cases} M = M_A - \frac{1}{l}(M_A + M_B)x + \frac{b}{l}Px - P\lambda \\ M = -V(l-x) - M_B + \frac{b}{l}Px - P\lambda \end{cases}$ より，直接に $\frac{\partial M}{\partial V} = -(l-x)$，$(= -(b-\lambda))$ を求め式(1)に代入すれば，

$$\frac{\partial W}{\partial V} = -\int_0^{l} \frac{M}{EI}(l-x)\, dx = -\int_0^{l}\int_0^{x} \frac{M}{EI} dx\, dx = d \quad \cdots\cdots (4)$$

となりて梁の撤分方程式と一致する。

以上のように、カスチリアの仕事式(1)、(2)は梁の撤分方程式(4)、(3)と一致するが、この式(4)、(3)は、図示の通り梁の両端には部材端角 θ_A、θ_B は共に 0 にして、また梁の左端Ⓐには変位のない場合であつたが、もし変位 d_A d_B があり、かつ部材端角 θ_A、θ_B がある場合は、式(3)、(4)は、

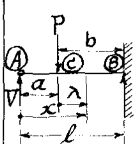
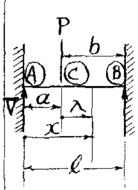
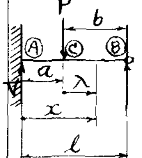
$$\begin{cases} \theta_A - \int_0^l \frac{M}{EI} dx = \theta_B \cdots\cdots\cdots\cdots (5) \\ d_A + \theta_A l - \int_0^l \int_0^x \frac{M}{EI} dx dx = d_B \cdots\cdots (6) \end{cases}$$

すなわち、梁の一般微分方程式となり、モールの法則とも一致する。すなわち、カスチリアの式はモールの式の一面を表はしてゐると云える。

カスチリア式の標準適用方法について

前述の通りカスチリア式はその適用を一歩誤ると全然誤つた結果となるから、次にその標準適用方法を表示し、結果をも併記して、その正しいことを示す。ただし、副座標を用う。[2]

カスチリア1式標準適用表

諸式 / 梁端條件	曲げモーメント式	偏微分係数	積分結果	結果
	$M = Vx - P\lambda$ $M = -\frac{M_B}{l} x + P(\frac{bx}{l} - \lambda)$	$\frac{\partial M}{\partial M_A} = 0$ $\frac{\partial M}{\partial V} = x = a + \lambda$	$\theta_A - 0 = \theta_B$ $d_A + \theta_A l - \{\frac{1}{3}\frac{M_B}{EI} l^2 - \frac{1}{6}\frac{Pab}{EI}(l+b)\} = d_B$	$M_B = \frac{EI}{l}(3\theta_B - 3R) + \frac{Pab}{2l^2}(l+a)$, $R = (d_B - d_A)/l$
	$M = M_A + Vx - P\lambda$ $M = \frac{M_A}{l}(l-x) - \frac{M_B}{l}x + P(\frac{b}{l}x - \lambda)$ $M = -V(l-x) - \frac{M_B}{l}x + P(\frac{b}{l}x - \lambda)$	$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -1$ $\frac{\partial M}{\partial V} = -(l-x) = -(b-\lambda)$	$\theta_A - (\frac{1}{2}\frac{M_A}{EI} l - \frac{1}{2}\frac{M_B}{EI} l + \frac{1}{2}\frac{Pab}{EI}) = \theta_B$ $d_A + \theta_A l - \{\frac{1}{3}\frac{M_A}{EI} l^2 - \frac{1}{6}\frac{M_B}{EI} l^2 + \frac{Pab}{6EI}(l+b)\} = d_B$	$M_A = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B - 3R) - \frac{Pab^2}{l^2}$, $M_B = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A - 3R) + \frac{Pa^2 b}{l^2}$, $R = (d_B - d_A)/l$
	$M = M_A + Vx - P\lambda$ $M = \frac{M_A}{l}(l-x) + P(\frac{x}{l} - \lambda)$ $M = -V(l-x) + P(\frac{x}{l} - \lambda)$	$\frac{\partial M}{\partial V} = -(l-x) = -(b-\lambda)$	$d_A + \theta_A l - \frac{1}{3}\frac{M_A}{EI} l^2 - \frac{1}{6}\frac{Pab}{EI}(l+b) = d_B$	$M_A = \frac{EI}{l}(3\theta_A - 3R) - \frac{Pab}{2l^2}(l+b)$, $R = (d_B - d_A)/l$

むすび カスリチリア1の仕事式は梁に関するモールの二つの法則の一面を云つたもので、その表現方法も充分ではなく、適用上に細心の注意を要す。

参考文献 1) 鷹部屋福平：撓角理論とその応用。 2) 石川時信：副座標によるBeam Theoryについて。土木学会論文集38号 他他。(講演の時に譲る。)