

II-27 河床変動に関する二三の考察

京都大学工学部 正員 芦田 和男
京都大学工学部 正員 田中 祐一朗

1. はしがき： 河床変動は従来より特性曲線法や微小変動法などによって取り扱われているが、とくに後者については、いづれも初期変動が $Z = A_0 e^{it + i\beta x}$ なる形で与えられる場合について検討され、その性質について考察が進められているようである。したがって初期変動が任意の形で与えられる場合についてはその解は求められていない。こうした場合、すなわち河床の初期形状が任意の形で与えられている場合について著者らはRiemann積分法を用いてその一般解を求めた。またその解を検討することによりこの取り扱いの適用限界および河床変動の二三の性質などを明らかにすることができた。

2. 基礎方程式： 不定流の運動方程式および連続式は流速分布に関する補正係数 m を1とすると、単位中の長方形断面における二次元流の場合について、

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = i - \frac{u_b}{g h} \quad \dots\dots (1) \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h \cdot v) = 0 \quad \dots\dots (2)$$

で与えられる。また流量量式としては種々のものが提案されているが、こゝではBrownの型のものを用いるものとする。単位中、単位時間当りについて、

$$q_t = \alpha' u_b (u_b^2 - u_{bc}^2)^m \quad \dots\dots (3)$$

となり、また流砂の連続式は

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_t}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (4)$$

と表わされる。

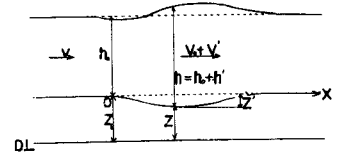


FIG-1 記号説明図

そこで河床の微小な変動 z' によって生ずる水深および平均流速の等流状態からの微小変動量を h', v' とし、一定量と微小量とに分けてそれぞれ

$$h = h_0 + h', \quad v = v_0 + v', \quad z = z_0 + z' \quad \dots\dots (5)$$

とする。(5)式を(1)および(2)式に代入して高次の微小項を省略すると、

$$\frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{v_0}{g} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\pi^2 v_0^2}{g h_0^3} (1 + 2 \frac{v'}{v_0} - \frac{g}{h_0} \frac{h'}{h_0}) \quad \dots\dots (6) \quad \frac{\partial h'}{\partial t} + h_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (7)$$

が得られる。この(6)および(7)式において

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{v_0}{g} \frac{\partial v'}{\partial x} = - \frac{v_0}{g h_0} \frac{\partial h'}{\partial x} (1 - \frac{\omega}{v_0}), \quad \frac{\partial h'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial h'}{\partial x} = v_0 (1 - \frac{\omega}{v_0}) \frac{\partial h'}{\partial x}$$

となる。こゝに $\omega = - \frac{\partial h'}{\partial t} / \frac{\partial h'}{\partial x}$ であり河床変動の伝播速度を表わす。したがって運動方程式および連続式のどちらにも $|\omega/v_0| \ll 1$ なる条件のもとでは $\partial/\partial t$ の項を省略してよいことがわかる。そのような場合には、次のような河床変動に関する基礎方程式が誘導される。

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 z'}{\partial x \partial t} - b \frac{\partial z'}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots (8)$$

$$\text{こゝに} \quad a = \frac{6}{7} \frac{1 - F_0}{K' v_0}, \quad F_0 = \frac{v_0}{\sqrt{g h_0}}, \quad b = \frac{20}{7} \frac{\pi^2 v_0^2}{K' h_0^{2/3}} \quad \dots\dots (9)$$

$$K' = \frac{\alpha' u_b}{(1-\lambda) v_0 h_0} \left| (u_b^2 - u_{bc}^2)^m + 2m u_b (u_b^2 - u_{bc}^2)^{m-1} \right|, \quad \alpha' = \frac{K d}{\{(\sigma/\rho - 1) g d\}^m}$$

$$3. \text{基礎方程式の解: } (8) \text{式を解くために} \quad Z' = Z'_0 e^{\delta x - i t} \quad \dots\dots (10)$$

とおき変数 x, t を次のように ξ, η に変換し、 δ, η を次のように決めると(8)式は(13)式となる。

$$\xi = x - a x, \quad \eta = t \quad \dots\dots (11) \quad \delta = \frac{b}{a}, \quad \eta = \frac{2b}{a^2} \quad \dots\dots (12) \quad \frac{\partial^2 Z'_0}{\partial \xi^2} - \frac{b^2}{a^2} Z'_0 = 0 \quad \dots\dots (13)$$

この(13)式は双曲線型偏微分方程式であり Riemann 積分法を応用して解くことができる。この Riemann 関数 v は次のように求められる。

$$v(z, \eta; z_0, \eta_0) = \int_0^1 \left[2\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(\xi - z_0)(\eta - \eta_0)} \right] \dots \dots \dots (14)$$

そこで次のような初期条件および境界条件の場合について解を求める。

$$x=0, 0 \leq x \leq x_1, z' = f(x); \quad 0 \leq x \text{ 又は } x \leq x_1, z' = 0 \dots \dots \dots (15)$$

$$x=0 \text{ 且 } z' = 0, \quad \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (16)$$

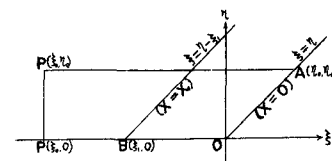


FIG-2 積分路

(15)および(16)の諸条件を満足する $z-\eta$ 平面上での積分路は FIG-2 の如くになり、(15)の条件にしたがって次のようにその範囲を分け、それぞれの範囲における曲線にそれぞれ次の積分を行なうことによりその解を得ることができる。

$$f_z(p d\eta - q dz) = 0 \quad \text{ここに } p = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial z'}{\partial \eta} - z' \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial z'}{\partial \xi} - z' \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \dots \dots \dots (17)$$

i) $z_0 \leq z$, すなわち $x_1 \leq x_0 - \frac{t_0}{a}$ の場合,

これは x_0 時間後ににおいて真 x_0 に変動の先端が到達していない場合で、 $z' = 0$ となる。

ii) $z_0 \leq z_0 \leq 0$ すなわち $x_1 \geq x_0 - \frac{t_0}{a} \geq 0$ の場合,

これは x_0 時間後に変動の先端は x_0 を通過したが後端はまだ x_0 に到達していない場合で、

このときの解は次のようになる。

$$z' = f\left(x_0 - \frac{t_0}{a}\right) e^{-\frac{1}{2} \eta t_0} - e^{\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} t_0} \int_0^{x_0 - \frac{t_0}{a}} f(x) e^{-\frac{1}{2} x} \frac{\sqrt{b^2/a^2}}{\sqrt{x_0 - \frac{t_0}{a} - x}} \cdot \int_1 \left[2\sqrt{\frac{b^2}{a^2} \left(x_0 - \frac{t_0}{a} - x\right)} \right] dx \dots \dots \dots (18)$$

iii) $z_0 \geq 0$ すなわち $x_0 - \frac{t_0}{a} \leq 0$ の場合,

これは x_0 時間後には変動は全く x_0 を通過してしまっている場合で、 $z' = 0$ となる。

4. 解の検討: (18)式で示される解の性質は α -項と β -項との大きさの割合によって異なる。 α -項は $e^{-\frac{1}{2} \eta t_0}$ で減衰しながら、 $\omega = \frac{1}{a}$ の速度で伝播する波動解をあらわし、 β -項は x の変動の形状を歪める擾乱項である。

著者らは α -項と β -項との割合が河床こう配、粗度係数などの変化によってどのように変わるかを各種の場合について数値計算により検討した。その詳細については講演時にゆずるが、要約すると次のようである。 α -項と β -項との割合は変動の先端において最も大きく、後端に行くにつれて小さくなる。また Froude 数 F_0 が小なるときは小さく、 $F_0 = 1$ に近づくにしたがって大きくなるが F_0 が 1 よりも大きい場合は F_0 の増大とともに減少する。 a, b, x_1 などの値にもよるが一般に $F_0 = 1$ の近傍を除いては β -項を省略してもよいようであり、この場合変動は ω と t_0 によって決まる。すなわち、変動は常流 ($a > 0$) では下流へ、射流 ($a < 0$) では上流へ移動する。また β は常に正だから変動は時間と共に減衰していく。

上記の基礎方程式は、時間的加速度項を無視しており、この取り扱いが許されるのは前述の如く $|\frac{\omega}{v}| \ll 1$ の場合である。この条件は $|\frac{1}{2} - \frac{K'}{F_0}| \ll 1$ と書き直され、一般に K' は 1 に対して十分小さいから $F_0 = 1$ の近傍を除いてはこの取り扱いが妥当であることがわかる。

また微小変動法を用いている関係上 $z' \ll h_0$ であることが必要である。二つの数値計算による検討では、 $z'/h_0 = 0.1$ 程度に達すると高次の微小項を省略した影響があらわれてくるようである。

以上本論文は理論的取り扱いに終始したが今後は実験的検討を加えると共に Froude 数の影響および本方法の適用限界などの問題につき更に考察を進めたいと思っている。