

II-22 土砂輸送パイプの抵抗法則について

京都大学防災研究所 正員 矢野 勝 正

京大工業教育養成所 正員 大 同 淳 之

管路によって土砂と水とともに輸送する場合、管の抵抗法則は、従来図-1に示すように、ある特定の管径、土砂の粒径を対象として、縦軸に摩擦損失、横軸に平均流速、パラメーターに土砂の濃度をとって表されている。この方法は、管の抵抗を計算するにあたって、管径、土砂の粒径などが計算せんとする条件に一致した実験例があれば、摩擦損失が直接与えられて好都合であるが、条件の異なる場合には、諸種の条件と勘案して定めねばならず、あらゆる条件をみたすためには数多くの実験を必要とする。ここでは上記の流れを擬塑性流体として扱うことによって、これらの流体の特性値をとってこれを利用することによって、抵抗法則を求めんとしたものである。

変形速度 du/dr とせん断応力 τ の関係が次式で表されるものとする。

$$-du/dr = \tau^n / \mu \quad (1)$$

ここに n は構造粘度指数で、流体の性質によって定まる定数、 μ は擬塑性粘度である。

定常流の場合、管長 l 間の二断面のつりあいから

$$r/R = \tau / \tau_w \quad \tau_w = R \cdot \Delta P / 2L \quad (2)$$

が成立する。ここに R は管の半径、 τ_w は壁面せん断応力、 ΔP は管長 l 間の圧力降下を示す。(1)式に(2)式を代入して積分すると、

$$u = \frac{R \tau_w^n}{(n+1)\mu} \left\{ 1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1} \right\} \quad (3)$$

$$Q = \int_0^R 2\pi r u dr = \frac{\pi R^3}{(n+3)\mu} \tau_w^n \quad (4)$$

$$u_m = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R}{(n+3)\mu} \tau_w^n \quad (5)$$

が得られる。よって(2)、(5)式より

$$\frac{\Delta P}{l} = \left(\frac{4Q}{\pi R^3} \right) = n \log \left(\frac{R \cdot \Delta P}{2L} \right) + \log \frac{4}{(n+3)\mu} \quad (6)$$

となる。 $4Q/\pi R^3$ と $R \cdot \Delta P / 2L$ との関係と対数方眼紙にプロットし、もしデータが直線になれば(1)式が成立することになり、その直線の勾配から構造粘度指数 n が定まる。また

$$\mu = \left\{ \pi R^3 / (n+3) Q \right\} \left\{ (R \cdot \Delta P / 2L)^n \right\} \quad (7)$$

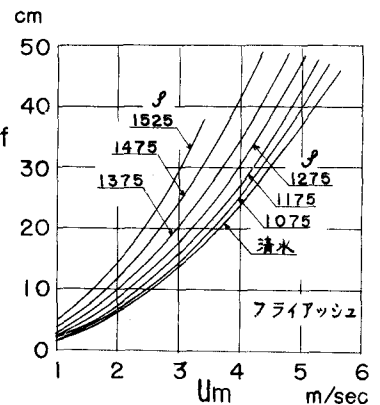


図-1 $hf \sim U_m$

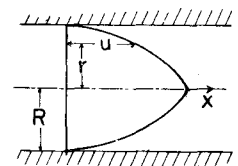


図-2 記号

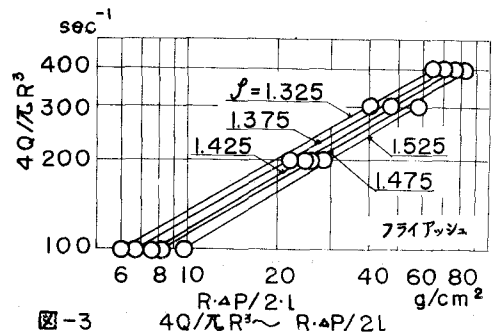


図-3 $4Q/\pi R^3 \sim R \cdot \Delta P / 2L$

として求まる。摩擦損失係数と流速の関係は次式で表はすものとする。

$$\frac{\Delta P}{L} = 4 \frac{f}{D} \frac{1}{2} \rho U_m^2 \quad (8)$$

ここに D は管径である。圧力損失に直接関係する壁面におけるせん断応力は、平均流速が等しくても n の値によって異なるので、(8)式に採用すべき U_m^2 として、次に定義する U^2 を用いる。

$$U^2 = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R r u^2 dr = \frac{n+3}{n+2} U_m^2 \quad (9)$$

ただし、 U_m^2 と U^2 は当然異なるので、 $n=1$ すなわちニュートン流体の場合について比較すると、ニュートン流体の場合

$$U^2 = \frac{2\pi}{\pi R^2} \int_0^R r u^2 dr = \frac{\tau_w^2 R^2}{12 \mu^2} \quad U_m^2 = \frac{\tau_w^2 R^2}{16 \mu^2} \quad (10)$$

であるから結局 $U^2 = (4/3) U_m^2$ の関係がある。ゆえに $\Delta P/L = 4 \frac{f}{D} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \rho U^2$ とすると $f \cdot Re/16$ の関係を利用することができ、この関係をみたすように Re 数を定めると

$$Re = \frac{6(n+3)^{1-\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}(n+2)} \frac{\rho U_m^{2-\frac{1}{n}} D^{\frac{1}{n}}}{\mu^{\frac{1}{n}}} \quad \lambda = \frac{\Delta P/L}{\frac{2}{D} \rho U_m^2 G(n)} \quad G(n) = \frac{3}{4} \frac{n+3}{n+2} \quad (11)$$

として、円流の領域における抵抗係数を定めることができる。

乱流の場合、乱れによる混合によって流速分布は均一化するが、これは円流において n の値が変化したと同じ結果となり、円流と同じ流動方程式が成立するものとする。擬塑性流体の混合機構は不明であるから、次元解析によるものとし、管内の流速を次式で表す。

$$U = f_1(f \cdot R \cdot \tau_w \cdot \mu \cdot n \cdot y) \quad (13) \quad \text{次元解析によて} \quad \frac{U}{U_*} = f_1\left(\frac{R \cdot \rho^n U_*^{2n-1}}{\mu} \cdot \frac{y}{R} \cdot n\right) \quad (13)$$

ニュートン流体と同様に円流底円なるものが存在するとすると、(13)式と同じ式が成立する。パイプ中央部の乱流域では、ニュートン流体の場合と同様に μ が省略しうるとすると

$$U_{max} - U = f_3(f \cdot R \cdot \tau_w \cdot n \cdot y) \quad (14) \quad \text{次元解析によて} \quad \frac{U_{max} - U}{U_*} = f_3\left(\frac{y}{R} \cdot n\right) \quad (15)$$

(15)式において U が平均流速 U_m に等しいとき $\frac{U_{max} - U_m}{U_*} = P_n$ とし、(13)式より $\frac{U_{max}}{U_*} = f_1(Z \cdot n)$ $= F_1(Z \cdot n)$ ここに $Z = R \cdot \rho^n U_*^{2n-1} / \mu$ とすると、 $U_m/U_* = \sqrt{2/\lambda}$ の関係から

$$\sqrt{2/\lambda} = U_{max}/U_* - P_n \quad (16)$$

となる。円流底円内の流れを $U/U_* = f_2(Z \cdot f \cdot n)$ (17) ここに $\xi = y/R$ とすると、円流底円の外側では (15)式と(17)式が同時に成立することから

$$f_2(Z \cdot f \cdot n) = F_1(Z \cdot n) - f_3(f \cdot n) \quad (18) \quad n \text{ の特定の場合 } f_{2n}(Z \cdot f) = F_{1n}(Z) - f_{3n}(f) \quad (19)$$

$df_{2n}/d(Z \cdot f) = f'_{2n}$ とすると $\partial f_{2n}/\partial Z = f'_{2n} f$ $\partial f_{2n}/\partial \xi = f'_{2n} Z$ (19)式より $f'_{2n} f = dF_{1n}/dZ$ $f'_{2n} Z = -df_{3n}/df$ であるから両者の関係を満足させるには $f'_{2n} = A/Z \xi$ の形でなければならぬ。ゆえに $dF_{1n}(Z) = A_n dZ/Z$ $F_{1n}(Z) = U_{max}/U_* = A_n \ln Z + B_n$ (20)

(20)式を(16)式に代入すると $\sqrt{2/\lambda} = A_n \ln Z + B_n - P$ (21) となり ニュートン流体と同様に抵抗法則が対数形で表されることになる。参考文献：(1)長谷川源太郎 他 サンドポンプの性能ならびに管抵抗の実験 運研報告 1957, (2)富田幸雄, 非ニュートン流体の工学的取扱, 日本機械学会誌 昭35,12, (3) D.W. Dodge et al.: Turbulent Flow of Non-Newtonian System. A. I. Ch. E. Jour. Vol.5 No2