

II-15 等流式の特曲線の検討

九州大学工学部 正員
同上 正員

上田年比古
● 中野昭

1 まえがき 流出解析における特性曲線法は、解を容易にするためと、急勾配河道では十分近似度が高いという観念のもとに、運動方程式に等流式が用いられている。ここでは、この特性曲線法でとらわれているところの、不定流運動方程式のかわりに等流式を用いる点について、その近似の程度を考察した。すなわち、まず等流式による解にもとづいて、不定流式の各項のオーダーを算定し、さらに、かなり緩勾配河川について、等流式と不定流式による解を比較し検討を行った。

2 斜面流出の基礎方程式 図-1の矩形模型流域で、時刻 t において、斜面上流端からの距離 x_s における水深を h 、流速を u 、単位巾当りの斜面流量を q 、有効降雨強度を r 、斜面の等価粗度係数を N 、斜面勾配を I とし、抵抗則は Manning 式によるとすれば成立つ式は

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_s} = r \quad \dots (1)$$

$$\text{運動式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x_s} + g \frac{\partial h}{\partial x_s} = gI - g \frac{N^2 u^2}{h^{4/3}} - \frac{ru}{h} \quad \dots (2)$$

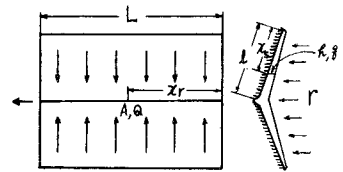


図-1 矩形模型流域図

現象の一般化のため次の無次元化を行なう。

$$\left. \begin{aligned} r/r_0 &= \alpha \delta, \quad x_s/l = \xi, \quad t/T_s = \alpha^{-1/2} \tau, \\ q/q_* &= \alpha \varphi, \quad h/h_* = \alpha^{1/2} \eta, \quad u/u_* = \alpha^{1/2} \omega, \end{aligned} \right) \quad \dots (3)$$

ここで r_0 を標準有効降雨強度、 α を定数、 l を斜面長、また q_* と r_0 によって流域が定常状態に達した時の斜面下流端流量とすれば、 $q_* = l r_0$ $\dots (4)$

h_* および u_* を等流状態で流れる時の水深および流速とすれば、

$$h_* = (q_*/\sqrt{I})^{3/5} = (l r_0/\sqrt{I})^{3/5} \quad \dots (5)$$

また、 $T_s = h_*/r_0 = (lN/\sqrt{I})^{3/5}/r_0^{2/5}$ $\dots (6)$ とおくと、 T_s は r_0 によって流域が定常状態になっている場合、等流式の成立を仮定してえられるところの、斜面上流端の雨水の影響が斜面下流端に達する時間である。したがって、

$$u_* = q_*/h_* = l/T_s \quad \dots (7) \quad \text{また、} \quad g = h u \quad \therefore \varphi = \eta \omega \quad \dots (8)$$

(3)~(7)式を(1)および(2)式に入れて整理すると、

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \delta \quad \dots (9)$$

$$\text{運動式} \quad D \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + D \omega \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + E \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 1 - \frac{\omega^2}{\eta^{4/3}} - D \frac{\delta \omega}{\eta} \quad \dots (10)$$

$$\text{ここで} \quad D = \frac{\alpha^{1/2} l}{g I T_s^2} = \frac{(\alpha r_0)^{1/2}}{g l^{1/2} N^{3/5} I^{1/2}}, \quad E = \frac{\alpha^{1/2} T_s r_0}{l I} = \frac{(\alpha r_0 N)^{3/5}}{g^{1/2} I^{1/2}} \quad \dots (11)$$

3 河道流出の基礎方程式 図-1で、時刻 t において、河道上流端からの距離 x_r における流積を A 、水深を H 、流量を Q 、流速を V 、径深を R 、河道長を L 、斜面から流入する単位長さ当りの流量を q 、また河道を上下流同一断面とし、その河道勾配を i 、等価粗度

係数を n とし、次式の定義による断面の係数を k , ρ とする。

$$AR^{2/3} = k A^\rho \quad \dots (12) \quad \text{また,} \quad K = \frac{\sqrt{k}}{n} k \quad \dots (13)$$

以上のように定義し抵抗則に Manning 式を用いれば、成立する式は、

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x_r} = z \varphi \quad \dots (14)$$

$$\text{運動式} \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x_r} + g \frac{\partial H}{\partial x_r} = g i - g \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} - \frac{z V \varphi}{A} \quad \dots (15)$$

現象の一般化のため次の無次元化を行う。

$$\left. \begin{aligned} x_r / L &= \lambda, \quad t / T_s = \alpha^{-1/2} \tau, \quad \varphi / \varphi_* = \alpha \varphi, \\ Q / Q_* &= \alpha \varphi, \quad V / V_* = \alpha^{1/2} v, \quad A / A_* = \alpha^{5/2} s, \end{aligned} \right\} \quad \dots (16)$$

Q_* を標準降雨 r_0 によって流域が定常状態に達した時の流域下流端流量、 F を流域面積とすれば、 $Q_* = F r_0 \quad \dots (17)$

A_* および V_* と Q_* が等流状態で流れる時の流積および流速とすれば、

$$Q_* = \frac{\sqrt{k}}{n} A_* R_*^{2/3} = \frac{\sqrt{k}}{n} k A_*^\rho = K A_*^\rho \quad \therefore A_* = \left(\frac{Q_*}{K} \right)^{1/\rho} = \left(\frac{F r_0}{K} \right)^{1/\rho} \quad \dots (18)$$

また、 $T_r = A_* / F r_0 = L / (F r_0)^{1/\rho} K^{1/\rho} \quad \dots (19)$ とおくと、 T_r は r_0 によって流域が定常状態になっている場合、等流式の成立を仮定してえられるところの、河道上流端の雨水の影響が下流端に達する時間である。したがって

$$V_* = Q_* / A_* = L / T_r \quad \dots (20) \quad \text{また,} \quad Q = AV \quad \therefore \varphi = \zeta v \quad \dots (21)$$

次に H を水深、 S を定数、 W を x_r の関数として、 $A = W H^S \quad \dots (22)$ とおく。いま、 $W / W_* = w$, $H / H_* = \alpha^{1/S} \lambda$ (ここで W_* は W の標準値、 $H_* = (A_* / W_*)^{1/S}$) $\dots (23)$ とすると、この式と $A = A_* \alpha^{5/2} s$ とから (22) 式は $\zeta = W \lambda^S \quad \dots (24)$

以上を (14) および (15) 式に入れて整理すると、

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial s}{\partial \tau} + \frac{1}{m'} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = \frac{\varphi}{m'} \quad \dots (25)$$

$$\text{運動式} \quad G' \frac{\partial v}{\partial \tau} + G v \frac{\partial v}{\partial \lambda} + J \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} = 1 - \frac{v^2}{S^{2(p-1)}} - G \frac{v \varphi}{\zeta} \quad \dots (26)$$

ここで $m' = \alpha^{5/2 - 1/\rho} m = \alpha^{5/2 - 1/\rho} \frac{T_r}{T_s} \quad \dots (27)$ また、 $\rho = 1.45$, $S = 1.5$ とすれば、

$$G = \frac{\alpha^{2(1-1/\rho)} L}{g L^{0.38} m'^{1.38} i^{0.31}} = \frac{(\alpha r_0 B)^{0.62} k^{0.62}}{g L^{0.38} m'^{1.38} i^{0.31}}, \quad G' = m' G = \frac{2^{0.6} (\alpha r_0)^{0.61} k^{0.61} L^{0.31} i^{0.30}}{g m'^{0.69} B^{0.27} N^{0.6} L^{0.65}}, \quad J = \frac{\alpha^{1/\rho} (F r_0 T_r)^{1/\rho}}{L i S (W_*)^{1/\rho}} = \frac{(\alpha r_0 B m)^{0.66}}{k^{0.66} L^{0.34} i^{0.23} r_0^{1.5} W_0^{2/3}} \quad (28)$$

上下流同一断面として、 $W = W_* \quad \therefore w = 1$ とすれば、

$$\text{運動式} \quad G' \frac{\partial v}{\partial \tau} + G v \frac{\partial v}{\partial \lambda} + J \zeta^{1-1/\rho} \frac{\partial s}{\partial \lambda} = 1 - \frac{v^2}{S^{2(p-1)}} - G \frac{v \varphi}{\zeta} \quad \dots (26')$$

4 等流式による斜面流出の解 等流と考えれば前出の斜面流出の基礎方程式 (9) (10) 式は

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \varphi \quad \dots (9)$$

$$\text{運動式} \quad 1 - \frac{w^2}{\eta^{4/3}} = 0 \quad \text{したがって (8) 式より} \quad \varphi = \eta^{5/3} \quad \dots (29)$$

(29) を (9) 式に入れれば、 $\frac{\partial \eta}{\partial \tau} + \frac{5}{3} \eta^{2/3} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \varphi \quad \dots (30)$ これを特性曲線表示すれば、

$$\text{特性曲線} \quad \frac{d\xi}{d\tau} = \frac{5}{3} \eta^{2/3} \quad \text{上にて,} \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \varphi \quad \dots (31)$$

対象降雨として 2 等辺三角形降雨を考える。降雨時間を t_d 、降雨強度の時間的増加およ

び減少率を α とすれば、増加部分 ($0 < t < t_d/2$) の降雨に対して、

$$\alpha \delta = r/r_0 = at/r_0 = aTs\alpha^{-\frac{2}{3}}\tau/r_0, \quad \text{したがって} \quad \delta = \tau, \quad \alpha = (aTs/r_0)^{\frac{3}{2}} \dots (32) \quad \text{とおく。}$$

減少部分の降雨に対して、

$$\alpha \delta = r/r_0 = a(t_d - t)/r_0 = aTs\alpha^{-\frac{2}{3}}(\tau_d - \tau)/r_0, \quad \text{したがって} \quad \delta = \tau_d - \tau, \quad \alpha = (aTs/r_0)^{\frac{3}{2}} \dots (33) \quad \text{とおく。}$$

いま斜面上流端を $\tau = 1.2$ および $\tau = 1.201$ に出発する 2 本の特性曲線上の、各 λ または τ における η , w の値を求め、 $\frac{\Delta w}{\Delta \tau}$, $w \frac{\Delta w}{\Delta \tau}$, $\frac{\Delta \eta}{\Delta \tau}$ を近似的に $\frac{\partial w}{\partial \tau}$, $w \frac{\partial w}{\partial \tau}$, $\frac{\partial \eta}{\partial \tau}$ に等しいと考えて求め、さらに $\frac{\eta w}{\tau}$ を求めた。図-3 にその結果を示す。

さらに、対象降雨として $r_0 = 10 \text{ mm/hr}$, $\alpha = 6$, 対象流域として遠賀川本川日の出橋上流斜面 ($l = 1,500 \text{ m}$, $I = 1/5$, $N = 1.0$ (m.s 単位)) を考えると、(11) 式の $D = 6.77 \times 10^{-6}$, $E = 5.91 \times 10^{-4}$ となり、これらと図-3 の各値より運動方程式 (10) 式の各項の大きさを求めれば図-4 となる。

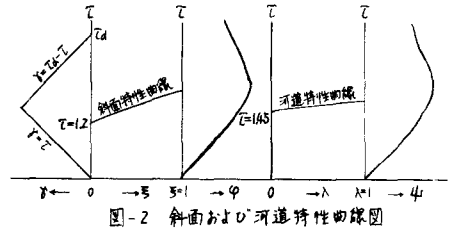


図-2 斜面および河道特性曲線図

5 等流式による河道流出の解 等流式と考えると前出の河道流出の基礎方程式 (25) (26) 式は

$$\text{連続式} \quad \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \frac{1}{m'} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\varphi}{m'} \quad \dots (25)$$

$$\text{運動式} \quad 1 - \frac{v^2}{g^{2(p-1)}} = 0 \quad \text{したがって (21) 式より} \quad \psi = \varphi^p \quad \dots (34)$$

$$(34) \text{ 式を (25) 式に入れると, } \frac{\partial \delta}{\partial \tau} + \frac{p\varphi^{p-1}}{m'} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = \frac{\varphi}{m'} \quad \dots (35) \quad \text{これを特性曲線表示すれば,}$$

$$\text{特性曲線} \quad \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{p\varphi^{p-1}}{m'} \quad \text{上にて,} \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\varphi}{m'} \quad \dots (36)$$

前項の 2 等辺三角形降雨で、河道上流端を $\tau = 1.45$ および $\tau = 1.451$ に出発する 2 本の特性曲線上の各 λ または τ における ψ , v を求め、 $\frac{\Delta \psi}{\Delta \tau}$, $v \frac{\Delta \psi}{\Delta \tau}$, $\psi^{\frac{1}{p-1}} \frac{\Delta \psi}{\Delta \tau}$ を近似的に $\frac{\partial \psi}{\partial \tau}$, $v \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$, $\psi^{\frac{1}{p-1}} \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$ に等しいと考えて求め、さらに $\frac{v\psi}{\tau}$ を求めた。図-5 にその結果を示す。

次に斜面の場合と同様、山間部河川志賀瀬川 ($F = 50 \text{ km}^2$, $L = 12,000 \text{ m}$, $i = 1/50$, $K = 1.0$, $T_s = 21,770 \text{ sec}$, $T_r = 2,595 \text{ sec}$, $m' = 0.140$) については $G = 2.76 \times 10^{-2}$, $G' = 3.87 \times 10^{-3}$, $J = 1.32 \times 10^{-2}$, また緩勾配河川遠賀川本川日の出橋上流 ($F = 369.9 \text{ km}^2$, $L = 38,340 \text{ m}$, $i = 1/730$, $K = 0.2$, $T_s = 21,770 \text{ sec}$, $T_r = 12,622 \text{ sec}$, $m' = 0.681$) については $G = 5.45 \times 10^{-2}$, $G' = 3.70 \times 10^{-2}$, $J = 3.03 \times 10^{-1}$, となりこれらと図-5 の各値より運動方程式 (27) 式の各項の大きさを求めれば図-6 および 7 となる。

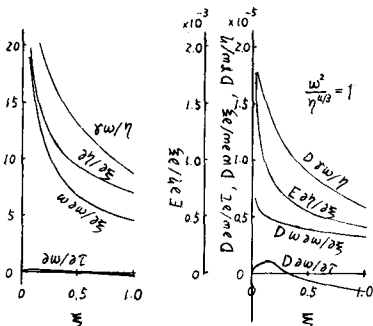


図-3

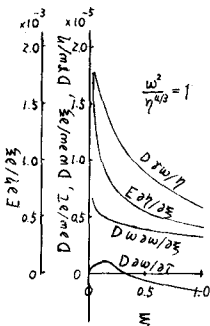


図-4

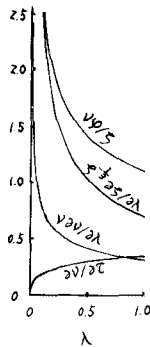


図-5

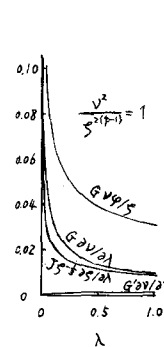


図-6

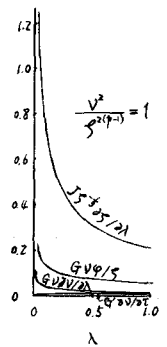


図-7

6 運動方程式の検討 図-3および図-5からわかるように、無次元化された各微分値²⁰などの値は、互いにそれほど大きな差はなく、したがって運動方程式の各項の大きさを決定する要素は係数D、E、あるいはG、G'およびJの値であることがわかる。斜面流出の場合、対象斜面のDおよびEがきわめて小さく、したがって図-4に示すように摩擦項および重力の項のJに対して、これ以外の項は無視しうる。すなわち、等流式を用いても十分に精度をもつものと考えられる。河道流出の係数は(27)式に示すように、Gについては長れの影響が大きく、Jについては短の影響が大きい。また流域が相似形で増大していく場合、流域面積の大小がG、G'およびJに与える影響は小さい。図-6にみられるように山間部流域では各項の値はかなり小さな値となり、したがって摩擦項および重力の項のJに対して、その他の項は無視しうると考えられる。しかし遠賀川流域河道はかなり緩勾配河道でありJが大きいため、図-7にみられるように、水深変化の項 $J \frac{d^2 y}{dx^2}$ が大きな値を示している。したがってこの場合に等流式を用いることは、若干の誤差を生ずるものと考えられるのでこれについてさらに検討を行った。

7 流出方程式の厳密解と等流式による近似解の比較

ここでは遠賀川本川昭和30年7月洪水について、横からの流入量を与えて、これに対する不定流運動方程式による解^(註)、すなわち流出方程式の厳密解と等流式による近似解とを比較した。その結果を図-7に示す。

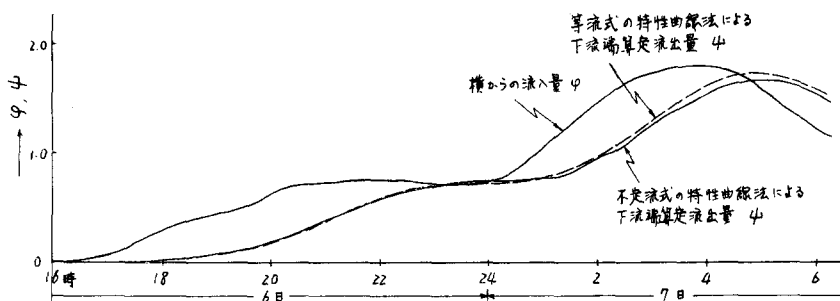


図-8 遠賀川本川 昭和30年7月洪水算定図

8 結論 以上を総括すると斜面流出の不定流運動方程式においては摩擦力と重力の項に比してこれ以外の項は小さく、したがってこれらは無視した等流の式を不定流の式に代用してよい。河道流出では、不定流運動方程式の中の水深変化の項が大きくなる傾向をもち、これは^{1,23}に逆比例する。計算の結果、山間部にみられるような急勾配河道に対しては摩擦力と重力の項に比してこれ以外の項は、斜面流出の場合ほどではないが、なおかなり小さく等流式を代用してよい。しかし遠賀川日の出橋上流(平均勾配1/730)のような中流程度の緩勾配河川になると水深変化による項がかなり大きくなるが、不定流式による解と等流式による解を比較すると、この項を省いたために生ずる誤差は比較的小さくなった。したがって、未解決の問題が多く、流出量算定の精度がまだかなり劣っている現在の段階では、等流式を用いてもその誤差は許容しうると考えられる。

(註) 不定流運動方程式の解法および計算法は、上田年比五：特性曲線による不定流計算法の簡易化，第16回土木学会年次講演会概要，昭36，5，