

## II-5 Hydrostatic Curve の計算について(第2報)

日本大学 正員 木村喜代治

hydrostatic curve の実際計算は数値積分などによつて求められている<sup>1)</sup>。本報はこれを解析的に計算した。この結果を用いて2・3の曲線を描いた。これによつて前報<sup>2)</sup>で示した様に hydrostatic catenary は、従来示されている曲線の形状<sup>3)</sup>は誤りであることがわかった。

hydrostatic catenary は図-1 (a) の記号を用いて

$$X = - \int_a^z \frac{(Z^2 - b^2)}{\sqrt{(a^2 - b^2)^2 - (Z^2 - b^2)^2}} dZ \quad (1)$$

また hydrostatic arch は図-1 (b) の記号を用いて

$$X = \int_a^z \frac{(b^2 - Z^2)}{\sqrt{(b^2 - a^2)^2 - (b^2 - Z^2)^2}} dZ \quad (2)$$

によりそれを表わされる<sup>4)</sup>。

(I) hydrostatic catenary

式(1)を変形すると、

$$X = - \int_a^z \frac{(Z^2 - b^2)}{\sqrt{(a^2 - 2b^2 + Z^2)(a^2 - Z^2)}} dZ \quad (3)$$

1.)  $a^2 - 2b^2 > 0$  のとき

$a^2 - 2b^2 = c^2$  とし、更に  $Z^2 = a^2(1 - u^2)$  および  $u = sn\,v$  などの置換によつて

$$X = \sqrt{2(a^2 - b^2)} \cdot E\left\{\cos^{-1}\frac{Z}{a}, k\right\} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}} \cdot F\left\{\cos^{-1}\frac{Z}{a}, k\right\} \quad (4)$$

ただし  $k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - b^2/a^2)}}$  また  $E$  は第2種不完全積分、 $F$  は第1種不完全積分、 $sn$  などは Jacobi のな円関数を表わす。

2.)  $a^2 - 2b^2 < 0$  のとき

$a^2 - 2b^2 = -d^2$  とし、 $Z^2 = a^2(1 - \frac{a^2 - d^2}{a^2}u)$  および  $u = sn\,v$  などの置換によつて

$$X = a \cdot E\left\{\sin^{-1}\sqrt{\frac{a^2 - Z^2}{2(a^2 - b^2)}}, k\right\} - \frac{b^2}{a} \cdot F\left\{\sin^{-1}\sqrt{\frac{a^2 - Z^2}{2(a^2 - b^2)}}, k\right\} \quad (5)$$

ただし  $k = \frac{\sqrt{a^2 - d^2}}{a} = \sqrt{2(1 - b^2/a^2)}$ 。

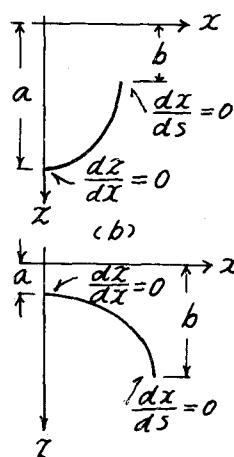
3.)  $a^2 - 2b^2 = 0$  のとき

式(3)から直接計算しても、また式(4)、(5)よりからでも

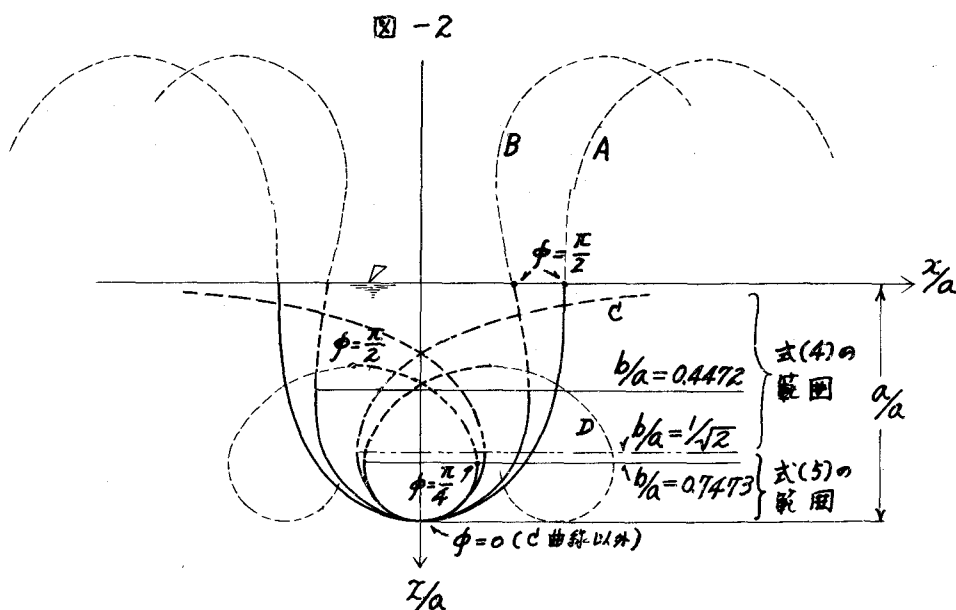
$$X = a\sqrt{1 - \frac{Z^2}{a^2}} - \frac{a}{4} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{Z^2}{a^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{Z^2}{a^2}}} \quad (6)$$

式(4)、(5)、(6) などは  $Z$  軸に対して一方の曲線を表はすもので、他方の曲線は単に負号を取れば良く、曲線は  $Z$  軸対象となる。図-2 はこれらの式より画いた曲線である。A 曲

図-1  
(a)



と式(5)との境界であつて、笑に  $\rho = 1$  となり、週期性を失つてゐる。  
D 曲線は  $b/a = 0.7493$  のものであり式(5)の範囲にある。これらの曲線は  $Z = a$  から  $b$  までを突線び、また  $b$  から  $\phi = \pi/2$  までを太破線び表わした。



式(2)を變形する。

$$x = \int_a^z \frac{(b^2 - z^2)}{\sqrt{(z^2 - a^2)(2b^2 - a^2 - z^2)}} dz \quad (7)$$

$$2b^2 - a^2 = e^2 \text{ とし, } z^2 = e^2(1 - \frac{e^2 - a^2}{e^2}u) \text{ の置換を}$$

$$\chi = \frac{b^2}{\sqrt{2b^2 - a^2}} \left[ K\{R\} - F\left\{\sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{Z^2 - a^2}{2(b^2 - a^2)}}, R\right\} - \sqrt{2b^2 - a^2} \left[ E\left\{\frac{\pi}{2}, R\right\} - E\left\{\sin^{-1} \sqrt{1 - \frac{Z^2 - a^2}{2(b^2 - a^2)}}, R\right\} \right] \right] \quad (8)$$

したがって  $R = \frac{\sqrt{e^2 - a^2}}{e} = \sqrt{\frac{2(b^2 - a^2)}{2b^2 - a^2}}$  , 2軸に代表となる

ることは *catenary* と同様である。図-3 の曲線は  $a/b = 0.4577$  のときである。これを見れば図-2 の D 曲線と相似であることがわかる。実際、前報で示した様に Z 軸を  $Z=c$  を通る軸に移動すれば *catenary* の  $a^2 - 2b^2 < 0$  と全く同形になる。

本研究は日本文学栗津清蔵教授の指導を得た。ここに記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 水理学[増補改訂版]: 物部長穂著, 岩波  
2) 東北支那 昭和36年度技術研究発表会 122発表  
3) 前ハは「前出1)」也 土木工学ハンドブック:  
土木学会編, 技報堂

