I—80　接触面にて接線変位差を許す3次元的有層弾性体の傳播波

信大工　○　夏目正太郎（正員）
〃　工博理博　谷本勉之助（正員）

有層弾性体に波動が伝わる問題は，地震波動を解析する一助として，従来取扱われ一応の結論が得られているが，これら一連の研究はあくまで上層と下部弾性体との接触面においては，決して離れたり辷ったりしない條件のもとに解かれた結果である。われわれはこのような接触の條件に疑義をさし挟むのである。それは上層と下部弾性体とは離れることはなくても，辷りが絶対に生じないとは断言出来ないであろう。そこでわれわれはこの接触面で，接線方向の辷りを許し，その量は全体系のひずみエネルギーが極小になるだけのものが生ずるのであるとして解析する。このような考えのもとで2次元的な場合について以前発表したが、従来の假定のもとに得られた波動とは別種のものが得られている。地震波動は3次元的な現象であり，2次元的に求めた解析結果と対比することは乱暴であるので，同様な問題を3次元的に拡張したのである。

今表面に原点をとり，下向きに z 軸を選び原点に集中振動荷重 Pe^{ipt} を想定すれば，回転対称体系となるので円墻座標をとる。下部弾性体は半無限的拡りをもち密度 ρ で弾性常数は λ, μ，ポアソン比 σ，ヤング率 E，直応力 $\widehat{rr}, \widehat{\theta\theta}, \widehat{zz}$，剪断応力 $\widehat{rz}$，水平変位 u，鉛直変位 w でありこの上へ厚さ H_0 の層が載っている。上層に対する物理的量にはすべて(′)を附す。

回転対称体系の振動には変位函数を適当に選ぶことにより、応力，変位等が簡単に表示することが出来る。この変位函数を下部弾性体には χ，上層には χ' を得るとすれば

$$\Box_1\Box_2\chi = 0, \quad \Box_1'\Box_2'\chi' = 0 \qquad (1)$$

なる性質をそなえている。こゝで

$$\left.\begin{aligned} \Box_1 &= \nabla^2 - a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \Box_2 = \nabla^2 - b^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \Box_1' &= \nabla^2 - a'^2\frac{\partial}{\partial t^2}, \quad \Box_2' = \nabla^2 - b'^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

の演算記号であり

$$\left.\begin{aligned} &a^2 = \frac{\rho}{\lambda+2\mu}, \quad b^2 = \frac{\rho}{\mu}, \quad a'^2 = \frac{\rho'}{\lambda'+2\mu'}, \quad b'^2 = \frac{\rho'}{\mu'}, \\ &\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

を示す~~も~~のとする。

(1)式を満足する変位函数としてつぎのものを選べば

$$\chi = \left(Ae^{-h_1 z} + Be^{-h_2 z}\right)J_0(kr)\cdot e^{ipt} \qquad (4)$$

$$\chi' = \left\{(C\cosh h_1' z + D\sinh h_1' z) + (E\cosh h_2' z + F\sinh h_2' z)\right\}J_0(kr)\cdot e^{ipt}, \qquad (5)$$

この中で

$$\left.\begin{aligned} h_1^2 &= k^2 - a^2p^2, \quad h_2^2 = k^2 - b^2p^2, \\ h_1'^2 &= k^2 - a'^2p^2, \quad h_2'^2 = k^2 - b'^2p^2. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$J_0(kr)$ はベッセル函数，A, B, C, D, E, F は未定係数である。変位函数 χ, χ' により変位，応力等を示せばつぎのようになる。

水平変位：

$$u = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial^2\chi}{\partial r\cdot\partial z}, \quad u' = -\frac{1}{2\mu'}\frac{\partial^2\chi'}{\partial r\partial z} \qquad (7)$$

鉛直変位：

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{1}{2\mu}\left\{2(1-\sigma)\Box_1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\chi \\ w' &= \frac{1}{2\mu'}\left\{2(1-\sigma')\Box_1' - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\chi' \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

応力：

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{rr} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\Box_2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\chi, \quad \widehat{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\Box_2 - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi \\ &\widehat{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma\Box_2 + 2(1-\sigma)\Box_1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\chi, \\ &\widehat{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\sigma)\Box_1 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\chi, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{rr}' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma'\Box_2' - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)\chi', \quad \widehat{\theta\theta}' = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma'\Box_2' - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\chi' \\ &\widehat{zz}' = \frac{\partial}{\partial z}\left\{\sigma'\Box_2' + 2(1-\sigma')\Box_1' - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\chi', \\ &\widehat{rz}' = \frac{\partial}{\partial r}\left\{(1-\sigma')\Box_1' - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\}\chi'. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

原点に作用する振動荷重 Pe^{ipt} による応力の連続性は

$$[\widehat{zz}]_{z=0} = \int_0^\infty J_0(kr)\cdot k\,dk\int_0^\infty f(\kappa)\cdot J(k\kappa)\cdot\kappa\,d\kappa$$

となり，今 $f(k)$ が k の無限小を除いて全部零になると考えれば

$$\int_0^\infty f(k)\cdot 2\pi k\,dk = -Pe^{ipt}$$

は有限であるような $f(k)$ で

$$[\widehat{zz}]_{z=0} = -\frac{Pe^{ipt}}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)\cdot k\,dk \qquad (11)$$

となる。表面では剪断応力は零とするから

$$[\widehat{rz}]_{z=0} = 0 \qquad (12)$$

接触面では接線変位において上層と下部弾性体との間に変位差 U_d を許しているから，

$$[U]_{z=H_0} - [U']_{z=H_0} = U_d \qquad (13)$$

変位，応力の連続性から

$$[w]_{z=H_0} = [w']_{z=H_0},\quad [\widehat{zz}]_{z=H_0} = [\widehat{zz}']_{z=H_0},\quad [\widehat{rz}]_{z=H_0} = [\widehat{rz}']_{z=H_0} \qquad (14)$$

を満足しなければならぬ。

これら6ヶの條件より．未定係数 A, B, C, D, E, F に関する連立方程式が立ち．6次の行列式が得られる。

$$\left|\begin{array}{cccccc|c}
A\cdot h_1 e^{-h_1H_0} & B\cdot k e^{-h_2H_0} & C\cdot h_1'\cosh h_1'H_0 & D\cdot h_1'\cosh h_1'H_0 & E\cdot k\cosh h_2'H_0 & F\cdot k\cosh h_2'H_0 & =\frac{1}{J_0(kr)} \\
0 & 0 & 0 & -\frac{(\sigma'\alpha'^2+h_1'^2)}{\cosh h_1'H_0} & 0 & \frac{\{2(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'^2\}}{\cosh h_2'H_0}\frac{h_2'}{k^3} & -\frac{Pe^{ipt}}{2\pi}\int_0^\infty J_0(kr)\cdot k\,dk \\
0 & 0 & -\frac{1}{\cosh h_1H_0}\frac{h_1'}{k} & 0 & \frac{\{(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'^2\}}{\cosh h_2'H_0}\frac{1}{k^2} & 0 & 0 \\
n & n\frac{h_2}{k} & \tanh h_1'H_0 & 1 & \frac{h_2'}{k}\tanh h_2'H_0 & \frac{h_2'}{k} & 2\mu'\int U_d\,dr \\
-n\frac{h_1}{k} & \frac{n\{2(1-\sigma)\alpha^2-h_2^2\}}{k^2} & \frac{h_1'}{k} & \frac{h_1'}{k}\tanh h_1'H_0 & -\frac{\{2(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'^2\}}{k^2} & -\frac{\{2(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'^2\}}{k^2}\tanh h_2'H_0 & 0 \\
\frac{(\sigma\alpha^2+h_1^2)}{k^2} & -\frac{\{2(1-\sigma)\alpha^2-h_2^2\}}{k^2} & \frac{(\sigma'\alpha'^2+h_1'^2)\tanh h_1'H_0}{k^2} & \frac{(\sigma'\alpha'^2+h_1'^2)}{k^2} & \frac{\{2(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'^2\}h_2'\tanh h_2'H_0}{k^3} & -\frac{\{2(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'^2\}h_2'}{k^3} & 0 \\
-\frac{h_1}{k} & \frac{\{(1-\sigma)\alpha^2-h_2^2\}}{k^2} & \frac{h_1'}{k} & \frac{h_1'}{k}\tanh h_1'H_0 & -\frac{\{(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'\}}{k^2} & -\frac{\{(1-\sigma')\alpha'^2-h_2'^2\}\tanh h_2'H_0}{k^2} & 0
\end{array}\right| \qquad (15)$$

こゝで $n = \frac{\mu'}{\mu}$，$\alpha^2 = (a^2-b^2)p^2$，$\alpha'^2 = (a'^2-b'^2)p^2$ である。

(15)式を解くと未定係数が荷重に関する項(φ)と．接線変位差に関する項(ψ)とに分けられるから，それぞれを求めて加えればよい。分母行列を D とすれば未定係数はつぎのようになる。

$$A = \frac{1}{D}(\varphi_a+\psi_a),\quad B = \frac{1}{D}(\varphi_b+\psi_b),\quad C = \frac{1}{D}(\varphi_c+\psi_c),\quad D = \frac{1}{D}(\varphi_d+\psi_d),\quad E = \frac{1}{D}(\varphi_e+\psi_e),\quad F = \frac{1}{D}(\varphi_f+\psi_f). \qquad (16)$$

全体系のひずみエネルギー(W)は

$$W = \frac{1}{2E}\int_{H_0}^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\left\{(\widehat{rr}^2+\widehat{\theta\theta}^2+\widehat{zz}^2) - 2\sigma(\widehat{rr}\,\widehat{\theta\theta}+\widehat{\theta\theta}\,\widehat{zz}+\widehat{zz}\,\widehat{rr}) + 2(1+\sigma)\widehat{rz}^2\right\} r\,dr\,d\theta\,dz$$
$$+\frac{1}{2E'}\int_0^{H_0}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty\left\{(\widehat{rr}'^2+\widehat{\theta\theta}'^2+\widehat{zz}'^2) - 2\sigma'(\widehat{rr}'\widehat{\theta\theta}'+\widehat{\theta\theta}'\widehat{zz}'+\widehat{zz}'\widehat{rr}') + 2(1+\sigma')\widehat{rz}'^2\right\} r\,dr\,d\theta\,dz \qquad (17)$$

であるから．これが極小になるように接線変位差が生ずるのである。

今，$D = 0$ とおくことにより辷らない場合の解が求まる。これによると波長の短い波は Rayleigh 波に近づき，波長の長い波は下部弾性体を伝わる横波に近づく，いわゆる分散の現象を示している。この状態は2次元的な場合とやゝ異り n が小さくなっても短い波長では余り変りがない。2次元体系で接線変位差を考慮したときの分散曲線はそうでない場合と異なったものが得られているので，3次元的な場合にも同様に相違が認められよう。

地球内部の構造を地震波動に基いて解明している現在では，従来のように接触面では絶対に辷らないとしている限りでは，一應結論づけられているであろうが，辷りを許したならば，層の厚さや密度分布等に若干の修正が必要となるであろう。これらのことは，実測結果を検討してから提案したい考えである。東大西村源六郎教授，金井清教授に感謝します。