

大阪市立大学 正員 倉田 宗 章
全 上 正員 の波多野 昭 吾

まえがき 周辺が直線からなる平板の曲げ問題に於てその形状が矩形以外の変形板についての厳密解は三角形, 平行四辺形などの外にはあまり見当らないようである。この種の変形板の中まだ理論解の見当らない周辺単純支持の梯形板, L形板, 更に平行四辺形板などについて一つの解法を試みたので報告する。

1. 解法の大要 相対二辺単純支持矩形板の他の二辺, 又は三辺単純支持矩形板の残りの一辺に分布線荷重及び分布曲げモーメントの作用しとる解を求め, これに板内荷重の作用しとる既知解を重ね合せ変形板としての夫々の周辺に於ける境界条件, 又は連続条件を満足させるように分布線荷重及び曲げモーメントに含まれている未定係数を決定し解式を完成させる方法を採用した。

2. 基本解式 図-1 の様な座標系に於て $x=0, x=a$ は単純支持されてる矩形板の $y=0$ なる辺に分布線荷重 $\sum_{m=1,2,3,\dots} P_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ 及び分布モーメント $\sum_{m=1,2,3,\dots} M_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ が作用し, 更に $y=b$ なる辺に分布線荷重 $\sum_{m=1,2,3,\dots} P'_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ 及び分布モーメント $\sum_{m=1,2,3,\dots} M'_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ が作用しとる場合の撓みを w_1 とすると

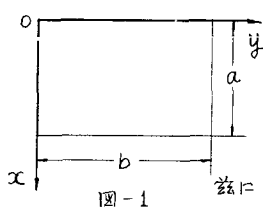


図-1

$$w_1 = \frac{a^2}{D\pi^2} \sum_{m=1,2,3,\dots} \frac{1}{(1-\nu)U_m m^2} \{ P_m \xi_m(y) + M_m f_m(y) + P'_m h_m(y) + M'_m k_m(y) \} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \text{----- (1)}$$

$$\xi_m(y) = \left(\frac{a}{m\pi} \right) \left\{ \left[\frac{(1-\nu)U_m - \rho(1+\nu)}{1-\nu} \tanh d_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + 2(d_m \tanh d_m - \rho \tanh d_m - d_m) \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \right. \\ \left. \left. - (d_m \tanh d_m - \rho \tanh d_m - d_m) \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \rho \tanh d_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right] \right\}$$

$$U_m = \rho^2 \tanh^2 d_m - d_m + d_m^2 \tanh^2 d_m$$

$$f_m(y) = \left\{ \frac{(1+\nu)(\rho \tanh d_m - d_m + d_m \tanh^2 d_m)}{1-\nu} \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{(1-\nu)U_m - 2\rho \tanh^2 d_m}{1-\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. - \rho \tanh d_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + (\rho \tanh d_m - d_m + d_m \tanh^2 d_m) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\}$$

$$d_m = \frac{m\pi b}{a}$$

$$\rho = \frac{3+\nu}{1-\nu}$$

$$h_m(y) = \left(\frac{a}{m\pi} \right) \frac{1}{\cosh d_m} \left\{ \frac{(1+\nu)d_m \tanh d_m}{(1-\nu)} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2}{(1-\nu)} (\rho \tanh d_m + d_m) \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. - (\rho \tanh d_m + d_m) \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + d_m \tanh d_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\}$$

ν : ポアソン比

$$k_m(y) = \frac{1}{\cosh d_m} \left\{ \frac{(1+\nu)(d_m - \rho \tanh d_m)}{(1-\nu)} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2d_m \tanh d_m}{1-\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. - d_m \tanh d_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + (d_m - \rho \tanh d_m) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\}$$

次に $y=0$ なる辺に線荷重 $\sum_{m=1,2,3,\dots} P_m \sin \frac{m\pi x}{a}$, 分布モーメント $\sum_{m=1,2,3,\dots} M_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ が作用し残りの三辺単純支持矩形板の撓みを w_2 とすると

$$w_2 = \frac{a^2}{D\pi^2} \sum_{m=1,2,3,\dots} \frac{1}{m^3 \pi^3 \nu_m} [P_m h_m(y) + M_m k_m(y)] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{茲に } h_m(y) = \frac{a}{m^3 \pi^3 \nu_m} \left\{ \left[d_m (\tanh d_m - \coth d_m) - \frac{2}{1-\nu} \right] \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + \frac{2}{1-\nu} \tanh d_m \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \tanh d_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\}$$

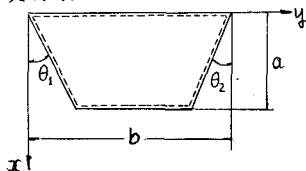
$$R_m(y) = \frac{1}{m^2 \nu_m} \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \coth d_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{2-\nu}{1-\nu} \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{a} \coth d_m \cosh \frac{m\pi y}{a} \right]$$

$$\nu_m = (3+\nu) - (1-\nu)d_m(\tanh d_m - \coth d_m)$$

更に板内に分布荷重又は集中荷重の作用してゐる辺長 a, b なる四辺単純支持矩形板の撓みを w_3 とすると $w_3 = (\text{周知の式なる故省略})$ ----- (3)

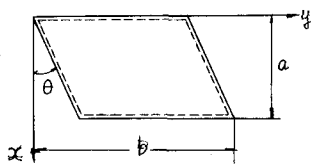
3. 解法の例 (1)又は(2)式に含まれてゐる未定係数を決定するための条件式の例として 図2~5のような変形板について示すと次のようになる。

梯形板
(図-2)



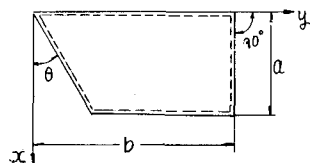
$$\begin{aligned} |w_1 + w_3|_{y=dx} &= 0, & |w_1 + w_3|_{y=b-\beta x} &= 0 \\ |\Delta w_1 + \Delta w_3|_{y=dx} &= 0, & |\Delta w_1 + \Delta w_3|_{y=b-\beta x} &= 0 \\ \alpha &= \tan \theta_1, & \beta &= \tan \theta_2 \end{aligned}$$

平行四辺形板
(図-3)



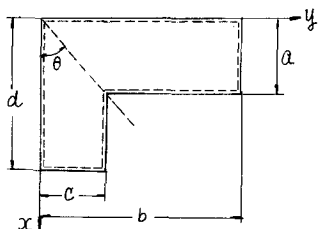
$$\begin{aligned} |w_1 + w_3|_{y=dx} &= 0 & \alpha &= \tan \theta \\ |\Delta w_1 + \Delta w_3|_{y=dx} &= 0 \\ P'_m &= (-1)^{m-1} P_m, & M'_m &= (-1)^{m-1} M_m \end{aligned}$$

片梯形板
(図-4)



$$\begin{aligned} |w_2 + w_3|_{y=dx} &= 0 \\ |\Delta w_2 + \Delta w_3|_{y=dx} &= 0 \\ \alpha &= \tan \theta \end{aligned}$$

L形板
(図-5)



$$\begin{aligned} |w_2 + w_3|_{y=dx} &= |w'_2 + w'_3|_{y=dx} \quad (\text{撓度}) \\ |\theta_{2y} + \theta_{3y}|_{y=dx} &= |\theta'_2 + \theta'_3|_{y=dx} \quad (y \text{ 方向撓角}) \\ |M_{2y} + M_{3y}|_{y=dx} &= |M'_2 + M'_3|_{y=dx} \quad (y \text{ 方向モーメント}) \\ |V_{2y} + V_{3y}|_{y=dx} &= |V'_2 + V'_3|_{y=dx} \quad (y \text{ 方向換算剪断力}) \end{aligned}$$

茲に w'_2 は(2)式に於て x と y, a と c, b と d, P_m と P'_m, M_m と M'_m を入此かえ、 w'_3 は(3)式に於て x と y, a と c, b と d を入此かえて示さる撓度式である。

4. 計算例

このような解法の可能性を確かめるため図-4に示すような梯形板について数値計算を行ひ中央線上の撓みを求めてみると左図のようになる。辺長 a の正方形板及び a 辺長 $a:1.5a$ の矩形板と比較すると梯形板の傾向が出ており変なものと考えられる。

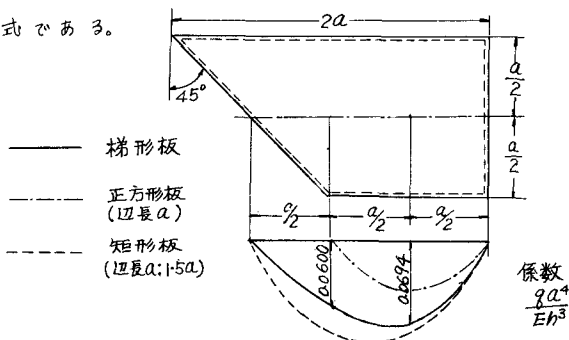


図-6 中心線断面撓度曲線