I—70　曲線直交異方性変厚扇形平板の解法

北大工学部　正員　芳村　仁

〔1〕 はしがき．本文は極座標で考へたとき極方向（r方向）と接線方向（θ方向）とで弾性的性質を異にする扇形平板でその厚さがr方向に変化する場合の曲げの問題を取扱ったものである。変厚板の問題は等方性のものでも一種の異方性を示すものであるが、極座標を採用して考へたとき、$E_r=E_\theta=E$の場合については O. Pichler[1] が軸対称のものについて研究して居りその中で非対称の場合も考慮にいれた基本微分方程式が示されている。しかし極座標でのいわゆる曲線直交異方性の平板で変厚の場合の研究はなされていないので筆者の誘導した微分方程式を基礎にして二直線辺が単純支持された扇形平板の曲げの解をべき級数の形で求めることができたので報告したい。r方向変厚平板はその変厚の仕方により次の二つに分けて考へることができる。すなはち．(1) 変厚の原点が座標の原点と一致しない一般の場合．(2) 変厚の原点が座標原点と一致する場合．である。

〔2〕 基本微分方程式　荷重を$p(r,\theta)$，平板の剛度をN_r，N_θ，捩り剛度をC_1．C_2（これらはrの関数）撓みをwとし等方性変厚板のときと同じ仮定を設けると微分方程式は次のようになる。[2]

$$p=N_r\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\left[\frac{2N_r+\nu_\theta N_r-\nu_r N_\theta}{r}+2\frac{dN_r}{dr}\right]\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}+\left[\frac{N_r\nu_\theta+N_\theta\nu_r}{r^2}+2\frac{C_2}{r}\right]\frac{\partial^4 w}{\partial r^2\partial\theta^2}+\left[\frac{C_1-3C_2-2N_r\nu_\theta}{r^3}+\right.$$
$$\left.+\frac{2}{r^2}\left(\frac{dC_2}{dr}+\nu_\theta\frac{dN_r}{dr}\right)\right]\frac{\partial^3 w}{\partial r\partial\theta^2}+\left[\frac{2N_r\nu_\theta+2N_\theta-C_1+3C_2}{r^4}+\frac{1}{r^3}\left(-2\frac{dC_2}{dr}-2\nu_\theta\frac{dN_r}{dr}-\frac{dN_\theta}{dr}\right)+\frac{\nu_\theta}{r^2}\frac{d^2N_r}{dr^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+$$
$$+\left[\frac{N_\theta}{r^3}-\frac{1}{r^3}\frac{dN_\theta}{dr}+\frac{\nu_\theta}{r}\frac{d^2N_r}{dr^2}\right]\frac{\partial w}{\partial r}+\left[-\frac{N_\theta}{r^2}+\frac{1}{r}\left(2(1+\nu_\theta)\frac{dN_r}{dr}-\nu_r\frac{dN_\theta}{dr}\right)+\frac{d^2N_r}{dr^2}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{N_\theta}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\theta^4}\quad\cdots\cdots(1)$$

扇形平板の中心角をαとし$C_1=C_2=(1-\sqrt{\nu_r\nu_\theta})\sqrt{N_rN_\theta}$，$N_\theta/N_r=c^2$とし$0<\theta<\alpha$で$\theta$に関する有限 Fourier Sine 変換を施し$\theta=0$．$\theta=\alpha$の二直線辺が単純支持の境界条件を考慮に入れると(1)式は結局次のようになる。なほ便宜上，変数rを$\rho=\frac{r}{b}$（bは内側の円弧辺までの距離）に変換して表す。

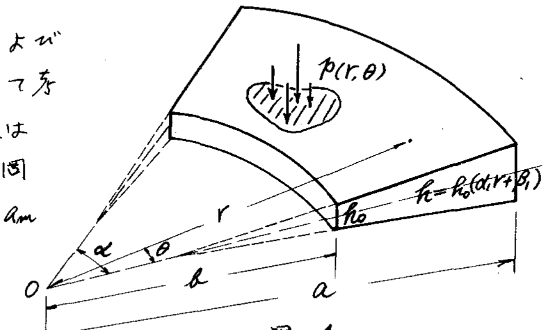
$$N_r\frac{d^4w_s}{d\rho^4}+2\left[\frac{N_r}{\rho}+\frac{dN_r}{d\rho}\right]\frac{d^3w_s}{d\rho^3}+\left[\frac{-(2c\beta^2+c^2)}{\rho^2}N_r+\frac{(2+c^2\nu_r)}{\rho}\frac{dN_r}{d\rho}+\frac{d^2N_r}{d\rho^2}\right]\frac{d^2w_s}{d\rho^2}+\left[\frac{(2c\beta^2+c^2)}{\rho^3}N_r+\right.$$
$$\left.+\frac{(-2c\beta^2-c^2)}{\rho^2}\frac{dN_r}{d\rho}+\frac{c^2\nu_r}{\rho}\frac{d^2N_r}{d\rho^2}\right]\frac{dw_s}{d\rho}+\beta^2\left[\frac{(-2c^2-2c+c^2\beta^2)}{\rho^4}N_r+\frac{(2c+c^2)}{\rho^3}\frac{dN_r}{d\rho}-\frac{c^2\nu_r}{\rho^2}\frac{d^2N_r}{d\rho^2}\right]w_s=b^4S\{p(r,\theta)\}\quad\cdots\cdots(2)$$

w_sは撓みの Sine 変換であり(2)式を解いてw_sを求めると撓み$w(r,\theta)$は$w(r,\theta)=\frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}w_s\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$で求めることができる。その他必要な断面力．反力等もw_sによって表すことができる。

〔3〕．変厚の原点が座標の原点と一致しない場合．一般に厚さhが$h=h_0(d_0\rho^m+d_1\rho^{m-1}+\cdots+d_m)$（$m>0$）のように変化するものとしよう。ここに$h_0$は内側の円弧辺での板厚であり．また$d_0\cdots d_m$は変厚の形が与えられると定まる定数である。このときの微分方程式は(2)式から次式が得られる。

$$\frac{d^4w_s}{d\rho^4}+\frac{[3m\text{次の多項式}]}{[(\rho-a_1)(\rho-a_2)(\ )\cdots(\rho-a_m)]^3}\frac{1}{\rho}\frac{d^3w_s}{d\rho^3}+\frac{[3m\text{次の}\rho\text{に関する式}]}{[(\rho-a_1)(\rho-a_2)(\ )\cdots(\rho-a_m)]^3}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2w_s}{d\rho^2}+\frac{[3m\text{次の多項式}]}{[(\rho-a_1)\cdots\cdots(\rho-a_m)]^3}\frac{1}{\rho^3}\frac{dw_s}{d\rho}+$$
$$+\frac{[3m\text{次の多項式}]}{[(\rho-a_1)\cdots(\rho-a_m)]^3}\frac{\beta^2}{\rho^4}w_s=\frac{S\{p(r,\theta)\}\cdot b^4}{N_{r0}[(\rho-a_1)\cdots(\rho-a_m)]^3}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

この式は $\frac{d^3w_s}{d\rho^3}$, $\frac{d^2w_s}{d\rho^2}$ 等の各係数が $\rho=a_1, a_2\cdots a_m$ および $\rho=0$ において極を有するがある一つの a_i について考へると $(\rho-a_i)$ を各係数の分母から除いた形の係数は $\rho=a_i$ で正則であるから a_i は正則特異点である。同様に他の a についても同じことがいえるので $a_1\cdots a_m$ および $\rho=0$ は正則特異点（微分方程式(3)の）であることが判る。



図−1.

(A) 正則点 a_0 の付近の解　(イ) 右辺 $=0$ の場合

(3)式で $\frac{d^3w_s}{d\rho^3}$ 等の各係数を $p(\rho), q(\rho), r(\rho), s(\rho)$ とし $\rho=a_0$ は正則点なので Taylor の定理により w_0 を次のようにおく。　$w_0=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\rho-a_0)^n$ ……(4)

また係数 p, q, r, s も　$p(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho-a_0)^n$, $q(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n(\rho-a_0)^n$ ……(5)

等とおく。これらを(3)式に代入すると

$$\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)(n-3)A_n(\rho-a_0)^{n-4}+\sum_{n=0}^{\infty}p_n(\rho-a_0)^n\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)(n-2)A_n(\rho-a_0)^{n-3}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}q_n(\rho-a_0)^n\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)A_n(\rho-a_0)^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}r_n(\rho-a_0)^n\sum_{n=1}^{\infty}nA_n(\rho-a_0)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}s_n(\rho-a_0)^n\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\rho-a_0)^n=0 \quad\cdots(6)$$

$(\rho-a_0)$ の各べきの係数を 0 とおくと $A_1\ A_2\cdots$ を決めるべき関係式が得られる。この関係式の第一の式には $A_0A_1A_2A_3A_4$ が含まれているが $A_0\to A_3$ は任意定数の役割をするものでこの式から A_4 が決定され以下の式から順次 A_n が求まることになる。(ロ) 特解　右辺 $=0$ の代りに $\sum_{n=0}^{\infty}B_n(\rho-a_0)^n$ と展開し(イ)と同様にして関係式をつくり第一の式で $A_0=A_1=A_2=A_3=0$ とおくことにより $w_p=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\rho-a_0)^n$ の係数が順次決定される。撓みは $w_s=w_0+w_p$ で得られ $|\rho-a_0|<|\rho-a|$ (a は a_0 に一番近い正則特異点)で収束する。

(B) 正則特異点 a の付近の解　この場合は上に述べたことより次の形の微分方程式について考へればよい。

$$\frac{d^4w_s}{d\rho^4}+\frac{p(\rho-a)}{(\rho-a)}\frac{d^3w_s}{d\rho^3}+\frac{q(\rho-a)}{(\rho-a)^2}\frac{d^2w_s}{d\rho^2}+\frac{r(\rho-a)}{(\rho-a)^3}\frac{dw_s}{d\rho}+\frac{s(\rho-a)}{(\rho-a)^4}w_s=F(\rho)\cdots(7)$$

(イ) 右辺 $=0$ の場合　やはり $p(\rho-a)=\sum p_n(\rho-a)^n$ 等とおき(7)の解 w_0 を

$$w_0=(\rho-a)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\rho-a)^n \quad\cdots(8)$$

とし(7)に代入すると(6)と似た形の式が得られる。$(\rho-a)$ の係数をそれぞれ 0 とおくと

$$A_0\phi(\lambda)=0,\quad A_1\phi(\lambda+1)+A_0\phi_1(\lambda)=0,\quad\cdots\cdots,\quad A_n\phi(\lambda+n)+A_{n-1}\phi_1(\lambda+n-1)+\cdots+A_0\phi_n(\lambda)=0$$

が得られる。ただし

$$\left.\begin{aligned}\phi(\lambda)&=\lambda^4+(p_0-6)\lambda^3+(-3p_0+q_0+11)\lambda^2+(2p_0-q_0+r_0-6)\lambda+s_0 &\cdots(9)\\ \phi_m(\lambda)&=p_m\lambda^3+(-3p_m+q_m)\lambda^2+(2p_m-q_m+r_m)\lambda+s_m &\cdots(10)\end{aligned}\right\}$$

(9)の第一式 $\phi(\lambda)=0$ から4ケの指数 λ が決定され各 λ について(9)の第二式以下で順次 A_n が決定される。(ロ) 特解　(A)と同様にして求めることができる。

[4]. 変厚の原点が座標の原点と一致する場合　例へば $h=h_0\rho^m$ のようなときであるが(2)式から得られる微分方程式は[3]の場合に比し非常に簡単になり (Euler型) $w=r^{\lambda}$ とおいて特性方程式を求めその根を $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ とすると λ は一般に二組の共役複素根となるので $A_{1,2}\pm B_{1,2}i$ の形で求まる。従って撓みは $w(\rho,\theta)=\frac{2}{\alpha}\sum\{C_1\rho^{A_1}\cos(B_1\ln\rho)+C_2\rho^{A_1}\sin(B_1\ln\rho)+C_3\rho^{A_2}\cos(B_2\ln\rho)+C_4\rho^{A_2}\sin(B_2\ln\rho)+w_p\}\times\sin\frac{n\pi}{\alpha}\theta$

[参考文献] 1) Otto Pichler: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veranderlichen Dicke
2). 芳村 仁：“曲線直交異方性変厚扇形平板の曲げについて”第11回応用力学連合講演会前刷、昭和36年8月