

I-61 β 法による構造物のレスポンス解析に関する考察

京都大学工学部 正員 山田 善一

1. 概説

最近構造物の動的解析，とくに動的な耐震計算や，走行荷重による橋梁振動の解析に，高速電子計算機が用いられるようになった。とくにデジタル型の計算機が多く用いられるが，これらの動的現象をデジタル型計算機で解く場合には，構造物の抽象化(量子化)と，数値計算法の選び方が，非常に重要である。構造物は一般に連続体よりなり，振動学的には，無限に多くの自由度をもつものであるが，デジタル型の計算機を用いて解く場合には，これを有限の自由度をもつ *discrete* な系で近似することが多い。⁽¹⁾⁽²⁾ また動的外力に対するレスポンスを計算するいわゆる初期値問題では，*Runge-Kutta* 法や *Newmark* の β 法が利用されることが多い。⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁴⁾ ここでは多自由度系のレスポンスを β 法を用いて解く場合の，計算法上の一、二の問題について考察する。

2. 時間間隔 h の選び方

レスポンスを *Step-by-Step* に求める場合の時間間隔 h の選び方は，解の精度，安定性，収束性に関係し，とくに h の選び方の不適当な場合は，解が発散して *Iteration* が不可能になったり，また不安定となり全く異なるレスポンスを示すことになる。⁽³⁾⁽⁴⁾ 1自由度系に対して安定性，収束性を検討したものに *Newmark* の研究がある。

いま *damping* を含まない線型のも自由度系の運動の方程式

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{F(t)\} \quad (1)$$

に直接 β 法を適用することを考える。 β 法では，ある時間のレスポンスの計算で， $\{\ddot{y}\}$ の値を仮定し， $\{y\}$ を計算して，式(1)に代入し， $\{\ddot{y}\}$ を求め，仮定した値と比較するという *Iteration* の過程を含んでいる。数値的には式(1)に直接代入するか，その内容を調べるために， $\{y\}$ を振動 *modes* のマトリックス $[Y]$ を用いて変換し，

$$\{y\} = [Y]\{\xi\} \quad (2)$$

とおけば式(1)は

$$[M][Y]\{\ddot{\xi}\} + [K][Y]\{\xi\} = \{F(t)\} \quad (3)$$

式(3)に若干の計算を行なえば，

$$\{\ddot{\xi}\} + [\lambda]\{\xi\} = [Y]^{-1}\{F(t)\} \quad (4)$$

式(4)はいわゆる *Modal Analysis* を用いた場合の方程式に他ならない。また式(4)は式(1)の計算過程を *Modes* に分解した内容を示すものである。式(4)の数値計算は自由度1の場合の計

算と同様であるから、その時間間隔は最も周期の短い振動、すなわち入の最大値に支配される。式(1)の数値積分の過程において、 $\{y\}$ の仮定値として $\{y\} = [Y]\{\ddot{y}\}$ を用いる限りにおいては、式(4)の入の最大値に適応した α を採用しない限り、数値計算は不可能となる。⁽³⁾⁽⁴⁾ α と α との関係については Newmark の研究をそのまま適用すればよい。

3. 直接積分と Modal Analysis の比較

いま式(1)に直接法を適用しても、 α の値を適当に選べば、Modal Analysis と本質的に変わるところがない。しかし数値計算上は Modal Analysis はつきり利便をもつ。

(1) 式(1)は式(4)にくらべマトリックスの乗算の計算数がきわめて多く、数値積分の各 Iteration においてこれを行なうことはきわめて不利である。Modal Analysis においては、Iteration の計算ではすべて式(4)を用い、計算を終了した後式(2)から $\{y\}$ を求めるものであるから、マトリックスの乗算は式(2)の計算に限られる。

(2) Modes の計算なしに式(1)の数値計算を行なう場合具体的に α を決定することができないが、Modal Analysis は α の決定が容易である。

(3) 解析結果の精度を上げるため、構造物の自由度を多くすれば、式(1)に含まれる高次振動の影響から、 α を極めて小さく選ぼうはならなくなり、遂には数値計算の実施が不可能となる。Modal Analysis では解にあまり影響しないと考えられる高次振動を cut して計算することにより α を計算可能な範囲にえらぶことができる。

(4) Modal Analysis では各 Mode の Modal Maximum から最大振幅を概算することができる。⁽⁵⁾

しかしながら Modal Analysis ではあらかじめ Modes と固有値入を求める必要があり、これは自由度の数が多くなれば、高速計算機を用いてもかなりの計算時間を必要とする。

4. 数値計算

実際に電子計算機に応用した数値計算については、講演会当日のべる。

参考文献

(1) 山田善一、構造物動的解析への応用、土木学会関西支部講習会テキスト、高速度計算機の土木工学への応用、昭和36年2月。

(2) I. Konishi & Y. Yamada, Earthquake Responses of a Long Span Suspension Bridge, Proc. of II WCEE, Vol. II, pp. 863-878, 1960

(3) N. M. Newmark, Computation of Dynamic Structural Response in the Range Approaching Failure, Proc. of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, 1952

(4) N. M. Newmark, A Method of Computation for Structural Dynamics, Proc. ASCE, Vol. 85, EM-3, p.199, July 1959

(5) R. L. Jennings & N. M. Newmark, Elastic Response of Multi-Story Shear Beam Type Structures Subjected to Strong Ground Motion, Proc. of II WCEE, Vol. II, pp. 699-717, 1960