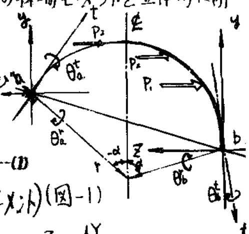
I —50　円弧部材を含む立体ラーメンの解法

九州大学工学部　　正員　山崎徳也
〃　　〃　○太田俊昭

(I) **緒言** 円弧部材をもつラーメンを立体的に取り扱ったものには岡本教授などの諸研究があるが、いまだ重心法を媒介としたタワミ角式さらに変形法にまで発展させたものは著者の知る範囲では認められない。本研究は等断面円弧片持バリを基本系として採用し、部材を含む面に垂直な荷重が作用するときの材端モーメントを立体的に解析し、タワミ角式さらに変形法式を求めようとするものである（図-1参照）。

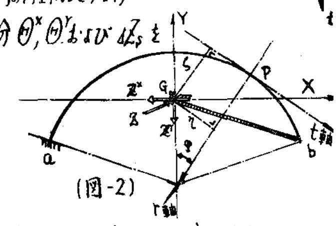


(II) 立体タワミ角式（変形式）　弾性重心 S と材端 b とを剛桿で連結し S 端に X 軸, Y 軸のまわりのモーメント $\mathfrak{X}^x$, $\mathfrak{X}^Y$ および Z 軸方向の力 $\mathfrak{Z}$ の3不静定量を与える（図-2参照）。円弧部材上の任意点 P における r 軸（法線方向）および t 軸（接線方向）に関するモーメントはそれぞれ次式で示される。$M_\varphi^r = \mathfrak{X}^x\sin\varphi + \mathfrak{X}^Y\cos\varphi + \mathfrak{Z}\eta + \mathring{M}^r$, $M_\varphi^t = (-)\mathfrak{X}^x\cos\varphi + \mathfrak{X}^Y\sin\varphi + \mathfrak{Z}\zeta + \mathring{M}^t$ ---(1)

（ただし $\eta = r(\lambda'+g')\sin\varphi$, $\zeta = r\{1-(\lambda'+g')\cos\varphi\}$, $\lambda' = \frac{\lambda}{r} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha$, $g' = \frac{g}{r} = \cos\alpha$, $\mathring{M}$; P 点の P-b 間の荷重によるモーメント）（図-1）

歪エネルギーは $W = \frac{1}{2}\int_b^a \frac{(M_\varphi^r)^2}{EI}ds + \frac{1}{2}\int_b^a \frac{(M_\varphi^t)^2}{GI_p}ds$ となる。よって Castigliano の定理より S 点の変形成分 Θ^x, Θ^Y および ΔZ_s を一般式であらわせば次の如くもとめられる。　すなわち

$$
\left.
\begin{aligned}
\Theta^x &= \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{X}^x} = \frac{r}{EI}\left\{a_1\mathfrak{X}^x + 0 + c_1(\mathfrak{Z}r) + L^x\right\}\\
\Theta^Y &= \frac{\partial W}{\partial \mathfrak{X}^Y} = \frac{r}{EI}\left\{0 + b_2\mathfrak{X}^Y + 0 + L^Y\right\}\\
-\frac{\Delta Z_s}{r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial \mathfrak{Z}} = \frac{r}{EI}\left\{a_3\mathfrak{X}^x + 0 + c_3(\mathfrak{Z}r) + L^z\right\}
\end{aligned}
\right\}\text{---(2)}
\qquad
\text{ここに}\left[
\begin{aligned}
L^x &= \int_{-\alpha}^{\alpha}\mathring{M}^r\sin\varphi\, d\varphi - \frac{1}{\rho}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathring{M}^t\cos\varphi\, d\varphi\\
L^Y &= \int_{-\alpha}^{\alpha}\mathring{M}^t\cos\varphi\, d\varphi + \frac{1}{\rho}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathring{M}^t\sin\varphi\, d\varphi\\
L^z &= (\lambda'+g')L^x + \frac{1}{\rho}\int_{-\alpha}^{\alpha}\mathring{M}\, d\varphi
\end{aligned}
\right.
$$



（図-2）

他方重心 S と両材端の変形成分の関係諸式がベクトル解析により次のごとく求められる。両材端の r, t 軸の回転成分を θ^r, θ^t, Z 軸の変位成分を ΔZ とすれば

(i) 回転成分 ---- $\Theta^x = \{(\theta_b^r)_X + (\theta_b^t)_X\} - \{(\theta_a^r)_X + (\theta_a^t)_X\}$,　$\Theta^Y = \{(\theta_b^r)_Y + (\theta_b^t)_Y\} - \{(\theta_a^r)_Y + (\theta_a^t)_Y\}$ ------(3)

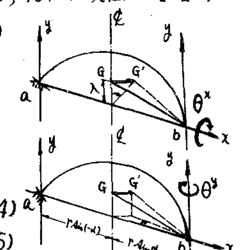
(ii) 変位成分（図-3参照）①両端の X 軸のまわりの回転による重心 S の変位はそれぞれ次の値となる。$\Delta_a^x = \lambda\theta_a^x$, $\Delta_b^x = \lambda\theta_b^x$

②両端の Y 軸のまわりの回転による重心 S の変位は　$\Delta_a^y = r\sin(-\alpha)\theta_a^y$, $\Delta_b^y = r\sin\alpha\,\theta_b^y$

③両端の Z 軸方向の変位による重心 S のそれは　$\Delta_a^z = (-)\Delta Z_a$, $\Delta_b^z = (-)\Delta Z_b$

④ ①, ② および ③ を合成すれば S 点と両材端変位の関係式が得られる。$(-)\Delta Z_s = (\Delta_b^x + \Delta_b^y + \Delta_b^z) - (\Delta_a^x + \Delta_a^y + \Delta_a^z)$ ---------(4)

ここに $(\theta^r)_X = \theta^r\sin\alpha$, $(\theta^t)_X = (-)\theta^t\cos\alpha$, $(\theta^r)_Y = \theta^r\cos\alpha$, $(\theta^t)_Y = \theta^t\sin\alpha$, $\Theta^x = (\theta^r)_X + (\theta^t)_X$, $\Theta^Y = (\theta^r)_Y + (\theta^t)_Y$ ------(5)



（図-3）

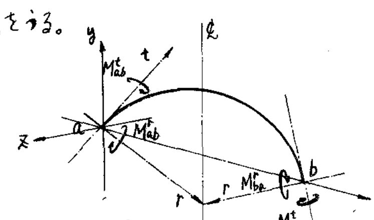
(5)式を(3),(4)式に代入し整理すれば

$$
\left[
\begin{aligned}
\Theta^x &= (\sin\alpha)\,\theta_b^r - (\cos\alpha)\,\theta_b^t + (\sin\alpha)\,\theta_a^r + (\cos\alpha)\,\theta_a^t\\
\Theta^Y &= (\cos\alpha)\,\theta_b^r + (\sin\alpha)\,\theta_b^t - (\cos\alpha)\,\theta_a^r + (\sin\alpha)\,\theta_a^t\\
(-)\frac{\Delta Z_s}{r} &= (\lambda'\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)\,\theta_b^r - (\lambda'\cos\alpha - \sin^2\alpha)\,\theta_b^t + (\lambda'\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)\,\theta_a^r + (\lambda'\cos\alpha - \sin^2\alpha)\,\theta_a^t + \frac{\Delta Z_a - \Delta Z_b}{r}
\end{aligned}
\right.
\text{------------(6)}
$$

(2)と(6)式を等置し重心 S の変形成分を消去すれば $\mathfrak{X}^x$, $\mathfrak{X}^Y$ および $\mathfrak{Z}$ が θ^r, θ^t, ΔZ の函数として求められる。一方材端モーメントは不静定量 $\mathfrak{X}^x$, $\mathfrak{X}^Y$ および $\mathfrak{Z}$ を用うれば次式であらわされる。すなわち b 端の r 軸に関する端モーメントは $M_b^r = (+)M_{\varphi(\varphi=\alpha)}^r$ なるゆえ(1)式により次のごとくなる。$M_b^r = \mathfrak{X}^x\sin\alpha + \mathfrak{X}^Y\cos\alpha + \mathfrak{Z}r(\lambda'+g')\sin\alpha + \mathring{M}_b^r$, 同じく b 端の t 軸に関する端モーメントは $M_b^t = (-)\mathfrak{X}^x\cos\alpha + \mathfrak{X}^Y\sin\alpha + \mathfrak{Z}r\{1-(\lambda'+g')\cos\alpha\} + \mathring{M}_b^t$, また a 端の r 軸に関する端モーメントは $M_a^r = (-)M_{\varphi(\varphi=-\alpha)}^r$ なるゆえ (1)式により $M_a^r = (-)\mathfrak{X}^x\sin(-\alpha) - \mathfrak{X}^Y\cos(-\alpha) - \mathfrak{Z}r(\lambda'+g')\sin(-\alpha) + \mathring{M}_a^r$, 同じく a 端の t 軸に関する端モーメントは $M_a^t = \mathfrak{X}^x\cos(-\alpha) - \mathfrak{X}^Y\sin(-\alpha) - \mathfrak{Z}r\{1-(\lambda'+g')\cos(-\alpha)\} - \mathring{M}_b^t$

前記 $\mathfrak{X}^x$, $\mathfrak{X}^Y$ および $\mathfrak{Z}$ を上述の各式の右辺に代入すれば結局次のごとく所要の立体タワミ角式をうる。

$$
\left.
\begin{aligned}
M_{ab}^r &= EK(\alpha_a^r\theta_a^r + \beta_a^r\theta_b^r + \gamma_a^r\theta_a^t + \delta_a^r\theta_b^t + C_1R_{ab}) + C_{ab}^r\\
M_{ba}^r &= EK(\beta_b^r\theta_a^r + \alpha_b^r\theta_b^r + \delta_b^r\theta_a^t + \gamma_b^r\theta_b^t + C_1R_{ab}) + C_{ba}^r\\
M_{ab}^t &= EK(\gamma_a^t\theta_a^r + \delta_a^t\theta_b^r + \alpha_a^t\theta_a^t + \beta_a^t\theta_b^t - C_2R_{ab}) + C_{ab}^t\\
M_{ba}^t &= EK(\delta_b^t\theta_a^r + \gamma_b^t\theta_b^r + \beta_b^t\theta_a^t + \alpha_b^t\theta_b^t + C_2R_{ab}) + C_{ba}^t
\end{aligned}
\right\}\text{----------(7)}
$$



（図-4）

ここに係数及び荷重項は

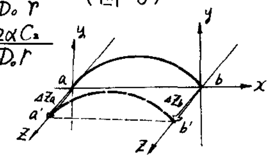
$$
\left[\begin{array}{llll}
\alpha_a^r = \alpha_b^r - \dfrac{2\alpha D_\alpha^r}{D_0} & , \quad \alpha_a^t = \alpha_b^t - \dfrac{2\alpha D_\alpha^t}{D_0} & , & C_{ab}^r = (-)\overset{\circ}{M}{}_a^r - \dfrac{1}{D_0}(A_3 L^x + B_3 L^y + C_3 L^z) \\
\beta_a^r - \beta_b^r - \dfrac{2\alpha D_\beta^r}{D_0} & , \quad \beta_a^t = \beta_b^t = \dfrac{2\alpha D_\beta^t}{D_0} & , & C_{ba}^r = (+)\overset{\circ}{M}{}_b^r - \dfrac{1}{D_0}(A_1 L^x + B_1 L^y + C_1 L^z) \\
(-)\gamma_a^r = \gamma_b^r = \dfrac{2\alpha D_\gamma^r}{D_0} & , \quad (-)\gamma_a^t = \gamma_b^t = \dfrac{2\alpha D_\gamma^t}{D_0} & , & C_{ab}^t = (-)\overset{\circ}{M}{}_a^t - \dfrac{1}{D_0}(A_4 L^x + B_4 L^y + C_4 L^z) \\
(+)\delta_a^r = \delta_b^r - \dfrac{2\alpha D_\delta^r}{D_0} & , \quad (-)\delta_a^t = \delta_b^t - \dfrac{2\alpha D_\delta^t}{D_0} & , & C_{ba}^t - (+)\overset{\circ}{M}{}_b^t - \dfrac{1}{D_0}(A_2 L^x + B_2 L^y + C_2 L^z)
\end{array}\right.
$$

ただし　$\overset{\circ}{M}_p$; P点の P～b 間の荷重によるモーメント（ $p = a$, b ）

さらに $R_{ab} = \dfrac{2\alpha}{D_0} \times \dfrac{\Delta Z_a - \Delta Z_b}{r}$ であらわされ これを(7)式に代入すれば, 変形式が求められる。すなわち

$$
\left[\begin{array}{l}
M_{ab}^r = EK\{\alpha_a^r \theta_a^r + \beta_a^r \theta_b^r + \gamma_a^r \theta_a^t + \delta_a^r \theta_b^t + \nu_1(\Delta Z_a - \Delta Z_b)\} + C_{ab}^r \\
M_{ba}^r = EK\{\beta_b^r \theta_a^r + \alpha_b^r \theta_b^r + \delta_b^r \theta_a^t + \gamma_b^r \theta_b^t + \nu_1(\Delta Z_a - \Delta Z_b)\} + C_{ba}^r \\
M_{ab}^t - EK\{\gamma_a^t \theta_a^r + \delta_a^t \theta_b^r + \alpha_a^t \theta_a^t + \beta_a^t \theta_b^t - \nu_2(\Delta Z_a - \Delta Z_b)\} + C_{ab}^t \\
M_{ba}^t = EK\{\delta_b^t \theta_a^r + \gamma_b^t \theta_b^r + \beta_b^t \theta_a^t + \alpha_b^t \theta_b^t + \nu_2(\Delta Z_a - \Delta Z_b)\} + C_{ba}^t
\end{array}\right.
$$

ここに $\left[\begin{array}{l} \nu_1 = \dfrac{2\alpha C_1}{D_0 r} \\ \nu_2 = \dfrac{2\alpha C_2}{D_0 r} \end{array}\right.$　(図-5)



A_1	A_3	$\frac{1}{\rho}\{2\alpha^2 \sin\alpha + \alpha \sin\alpha \sin 2\alpha - 2(\varkappa' + g')(\alpha \sin^2\alpha + \sin^3\alpha \cos\alpha)\}$ $+ \frac{1}{\rho^2}(2\alpha^2 \sin\alpha - \alpha \sin\alpha \sin 2\alpha - 2(\varkappa' + g')(\alpha \sin^2\alpha - \sin^3\alpha \cos\alpha)$
A_2	$(-)A_4$	$(\varkappa' + g')(-\alpha^2 + \sin^2\alpha \cos^2\alpha) + \frac{1}{\rho}\{2(\varkappa' + g')(-\alpha^2 + \alpha \sin\alpha \cos\alpha) - 2\alpha^2 \cos\alpha + 2\alpha \sin^3\alpha$ $+ 2\alpha \sin^3\alpha + \sin\alpha \sin 2\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{(\varkappa' + g')(-\alpha^2 + \alpha \sin 2\alpha - \sin^2\alpha \cos^2\alpha) - 2\alpha^2 \cos\alpha + 2(1 + \cos^2\alpha)\alpha \sin\alpha - \sin\alpha \sin 2\alpha$
B_1	B_3	$\frac{1}{\rho}\{2\alpha^2 \cos\alpha - \alpha \sin 2\alpha \cos\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{2\alpha^2 \cos\alpha + \alpha \sin 2\alpha \cos\alpha - 2 \sin\alpha \sin 2\alpha\}$
B_2	B_4	$\frac{1}{\rho}\{2\alpha^2 \sin\alpha - \alpha \sin 2\alpha \sin\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{2\alpha^2 \sin\alpha + \alpha \sin 2\alpha \cos\alpha - 4 \sin^3\alpha\}$
C_1	C_3	$\frac{1}{\rho}\{2\alpha \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \sin 2\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{2\alpha \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin 2\alpha\}$
C_2	$(-)C_4$	$(\alpha^2 - \sin^2\alpha \cos^2\alpha) + \frac{1}{\rho}(2\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha) + \frac{1}{\rho^2}(\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha + \sin^2\alpha \cos^2\alpha)$

D_0	$\frac{2}{\rho}[\{\alpha(\alpha^2 - \sin^2\alpha \cos^2\alpha)\} + \frac{1}{\rho}\{2\alpha(\alpha^2 + \sin^2\alpha \cos^2\alpha) - 2\alpha \sin^2\alpha - 2 \sin^3\alpha \cos\alpha\}$ $+ \frac{1}{\rho^2}\{\alpha(\alpha^2 - \sin^2\alpha \cos^2\alpha) - 2\alpha \sin^2\alpha + 2 \sin^3\alpha \cos\alpha\}]$
D_α^r	$\frac{1}{\rho}\{2\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha \cos 2\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{2\alpha^2 + \alpha \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \sin^2 2\alpha\}$
D_β^r	$\frac{1}{\rho}\{-2\alpha^2 \cos 2\alpha + \alpha \sin 2\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{-2\alpha^2 \cos 2\alpha - \alpha \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha\}$
D_γ^r	$\frac{1}{\rho}\{-2\alpha \sin^2\alpha \cos 2\alpha + \sin^2\alpha \sin 2\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{2\alpha \sin^2\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3 \sin^2\alpha \sin 2\alpha\}$
D_δ^r	$\frac{1}{\rho}\{2\alpha^2 \sin 2\alpha - 2\alpha \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin 2\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{2\alpha^2 \sin 2\alpha - 2\alpha \sin^2\alpha - \sin^2\alpha \sin 2\alpha\}$
D_α^t	$\{\alpha^2 - \sin^2\alpha \cos^2\alpha\} + \frac{1}{\rho}\{4\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha(1 + 2\sin^2\alpha) - 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha\}$ $+ \frac{1}{\rho^2}\{3\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) + \sin^2\alpha(7\cos^2\alpha - 4)\}$
D_β^t	$\{-\alpha^2 + \sin^2\alpha \cos^2\alpha\} + \frac{1}{\rho}\{-4\alpha^2 \cos^2\alpha + \alpha \sin 2\alpha + 2 \sin^2\alpha \cos^2\alpha)\}$ $+ \frac{1}{\rho^2}\{-\alpha^2(4\cos^2\alpha - 1) + 3\alpha \sin 2\alpha - \sin^2\alpha(4 - \cos^2\alpha)\}$
D_γ^t	$\frac{1}{\rho}\{2\alpha \sin^2\alpha(1 - 2\cos^2\alpha + 2 \sin^3\alpha \cos\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{2\alpha \sin^2\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3 \sin^2\alpha \sin 2\alpha\}$
D_δ^t	$\frac{1}{\rho}\{-2\alpha^2 \sin 2\alpha + 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \sin 2\alpha\} + \frac{1}{\rho^2}\{-2\alpha^2 \sin 2\alpha + 2\alpha \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \sin 2\alpha\}$

(Ⅲ) 解法　節点ごとに釣合の3条件を用うれば未知量 θ^r, θ^t, ΔZ が求まり, したがって端モーメントおよび剪断力を算定しうることになる。

本研究には文部省科学研究費の補助をうけた, 記して謝意を表する。