

I-31 連続アーチの精密解法

九州大学工学部 正員

山崎 徳也

" " " "

○ 南 旭

富士製鉄

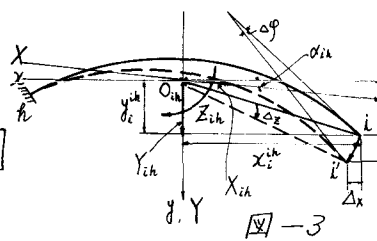
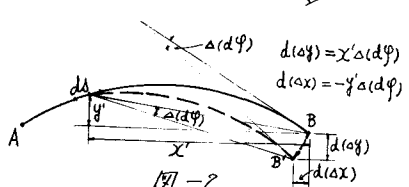
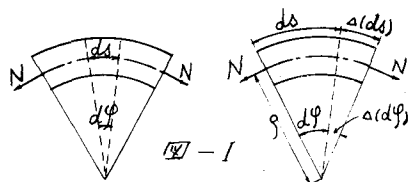
白石 基雄

1. 緒言 連続リブアーチの精密解法の一つに三瀬博士の⁽¹⁾九変位の定理があるが、著者の一人が求めて求めた軸力セン断力にも考慮した曲線材のタワミ角式⁽²⁾との対比において、この九変位の定理に軸力および温度項の影響としての幾何学的変形が欠けていることが認められた。一方この幾何学的変形は構造力学の教科書⁽³⁾にも記せられ精密解法としては無視し得るものである。したがって本報告ではこの幾何学的変形を導入して九変位の定理を完全化することを第一目的とする。次に上記タワミ角式において発表時に欠如していた温度項を補い本式をも完全に一般化し、九変位のそれと照査しその正当性を認めえた。以上2項目について要記するが、九変位の定理については三瀬博士の記号表現をそのまま用いた。

2. 幾何学的変形

いま軸力(引張を正) N による微小長さ ds の伸びは $\Delta(ds) = \frac{N \cdot ds}{EA}$ とする(図-1参照)。これによる中心角の微小変化は $\Delta(d\varphi) = \frac{\Delta(ds)}{r} = \frac{N \cdot ds}{EA \cdot r}$ 。よって任意の ds 部分の伸びにより材端 B は B' に移り、接線は $\Delta(d\varphi)$ だけ回転する(図-2参照)。以上は軸力 N によるものであるが、温度応力の場合も同様となる。すなわち温度上昇を正とする時 $\Delta(ds) = \varepsilon_t \cdot ds$, $\Delta(d\varphi) = \frac{\varepsilon_t \cdot ds}{r}$ 。したがって軸力および温度上昇による弾性重心 O_{ih} の幾何学的変形を $\bar{\Delta}$ とすれば、それぞれ次のごとく得られる(図-3参照)。

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_x^{ih} &= \Delta_x \cos \alpha_{ih} + \Delta_y \sin \alpha_{ih} + (y_i^{ih} \cos \alpha_{ih} - x_i^{ih} \sin \alpha_{ih}) \Delta_z \\ &= \cos \alpha_{ih} \left[\left(\int \frac{N}{r} \cdot N_{ih} \cdot dw' + X_{ih} \cdot \left(\frac{Y}{r} \right) \cos(\varphi - \alpha_{ih}) \cdot dw' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Y_{ih} \cdot \left(\frac{Y}{r} \right) \sin \varphi \cdot dw' + \left(\frac{\varepsilon_t \cdot Y}{r} \cdot ds \right) \right] \right. \\ \bar{\Delta}_y^{ih} &= \Delta_y \cos \alpha_{ih} - \Delta_x \sin \alpha_{ih} = -\cos \alpha_{ih} \left[\left(\frac{X}{r} \cdot N_{ih} \cdot dw' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + X_{ih} \cdot \left(\frac{X}{r} \right) \cos(\varphi - \alpha_{ih}) \cdot dw' + Y_{ih} \cdot \left(\frac{X}{r} \right) \sin \varphi \cdot dw' + \left(\frac{\varepsilon_t \cdot X}{r} \cdot ds \right) \right] \right. \\ \bar{\Delta}_z^{ih} &= \Delta_z = \left(\int \frac{N}{r} \cdot dw' + X_{ih} \cdot \left(\frac{Y}{r} \right) \cos(\varphi - \alpha_{ih}) \cdot dw' \right. \\ &\quad \left. + Y_{ih} \cdot \left(\frac{Y}{r} \right) \sin \varphi \cdot dw' + \left(\frac{\varepsilon_t \cdot Y}{r} \cdot ds \right) \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta_x &= - \left((-Y + y_i^{ih} - X \sin \alpha_{ih}) \frac{N \cdot ds}{EA \cdot r} \right. \\ &\quad \left. - (-Y + y_i^{ih} - X \sin \alpha_{ih}) \frac{\varepsilon_t \cdot ds}{r} \right) \\ \Delta_y &= \left((-X \cos \alpha_{ih} + x_i^{ih}) \frac{N \cdot ds}{EA \cdot r} \right. \\ &\quad \left. + (-X \cos \alpha_{ih} + x_i^{ih}) \frac{\varepsilon_t \cdot ds}{r} \right) \\ \Delta_z &= \left(\frac{N \cdot ds}{EA \cdot r} + \int \frac{\varepsilon_t \cdot ds}{r} \right) \end{aligned}$$

3. 九変位の定理

上記 $\bar{\Delta}$ を加味すれば、次の如く一般的に変形式が得られる。

$$\Delta_x^{ih} = \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial X_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial X_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{KT}{GA} \frac{\partial T}{\partial X_{ih}} \cdot ds + \left(\varepsilon_t \frac{\partial N}{\partial X_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{\varepsilon_t}{d} \frac{\partial M}{\partial X_{ih}} \cdot ds + \bar{\Delta}_x^{ih} \right) \right) \right) \right) = A_{1ih} \cdot X_{ih} + B_{1ih} \cdot Y_{ih} + G_{1ih} \quad (1)$$

$$\Delta_y^{ih} = \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Y_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial Y_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{KT}{GA} \frac{\partial T}{\partial Y_{ih}} \cdot ds + \left(\varepsilon_t \frac{\partial N}{\partial Y_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{\varepsilon_t}{d} \frac{\partial M}{\partial Y_{ih}} \cdot ds + \bar{\Delta}_y^{ih} \right) \right) \right) \right) = A_{2ih} \cdot X_{ih} + B_{2ih} \cdot Y_{ih} + G_{2ih} \quad (2)$$

$$\Delta_z^{ih} = \left(\frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Z_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial Z_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{KT}{GA} \frac{\partial T}{\partial Z_{ih}} \cdot ds + \left(\varepsilon_t \frac{\partial N}{\partial Z_{ih}} \cdot ds + \left(\frac{\varepsilon_t}{d} \frac{\partial M}{\partial Z_{ih}} \cdot ds + \bar{\Delta}_z^{ih} \right) \right) \right) \right) = A_{3ih} \cdot X_{ih} + B_{3ih} \cdot Y_{ih} + G_{3ih} \quad (3)$$

$$\text{ここに } M = M_{ih} + X_{ih} \cdot Y - Y_{ih} \cdot X + Z_{ih}, \quad N = N_{ih} + X_{ih} \cos(\varphi - \alpha_{ih}) + Y_{ih} \sin \varphi, \quad T = T_{ih} - X_{ih} \sin(\varphi - \alpha_{ih}) + Y_{ih} \cos \varphi$$

(1), (2), (3) 式を連立し解けば

1-1 桁材についても同じく次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} X_{ik} &= a_{1ik} \cdot \Delta_x^{ik} + a_{2ik} \cdot \Delta_y^{ik} + a_0^{ik} \\ Y_{ik} &= b_{1ik} \cdot \Delta_x^{ik} + b_{2ik} \cdot \Delta_y^{ik} + b_0^{ik} \\ Z_{ik} &= c_{1ik} \cdot \Delta_x^{ik} + c_{2ik} \cdot \Delta_y^{ik} + c_{3ik} \cdot \Delta_z^{ik} + c_0^{ik} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{ik} &= a_{1ik} \cdot \Delta_x^{ik} + a_{2ik} \cdot \Delta_y^{ik} + a_0^{ik} \\ Y_{ik} &= b_{1ik} \cdot \Delta_x^{ik} + b_{2ik} \cdot \Delta_y^{ik} + b_0^{ik} \\ Z_{ik} &= c_{1ik} \cdot \Delta_x^{ik} + c_{2ik} \cdot \Delta_y^{ik} + c_{3ik} \cdot \Delta_z^{ik} + c_0^{ik} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

橋脚 i-j については何ら加味すべき要はない

$$X_{ij} = A_P \cdot \Delta_i^P + A_0^P, \quad Y_{ij} = B_P \cdot \Delta_j^P + B_0^P, \quad Z_{ij} = C_P \cdot \Delta_k^P + C_0^P \quad \text{----- (6)}$$

(4), (5) および (6) 式を用いて i-j の釣合式を整理し, 結果変位 P, δ, γ で置き換えれば所要の九変位の定理の完全式が得られる。

$$A_{2k} P_k + A_{2i} P_i + A_{2k} P_k + B_{2k} \delta_k + B_{2i} \delta_i + B_{2k} \delta_k + C_{2k} \gamma_k + C_{2i} \gamma_i + C_{2k} \gamma_k = H_i$$

$$A_{3k} P_k + A_{3i} P_i + A_{3k} P_k + B_{3k} \delta_k + B_{3i} \delta_i + B_{3k} \delta_k + C_{3k} \gamma_k + C_{3i} \gamma_i + C_{3k} \gamma_k = V_i$$

$$A_{2k} P_k + A_{2i} P_i + A_{2k} P_k + B_{2k} \delta_k + B_{2i} \delta_i + B_{2k} \delta_k + C_{2k} \gamma_k + C_{2i} \gamma_i + C_{2k} \gamma_k = M_i$$

ここに A, B, C および右辺は いずれも形状および荷重により決まる常数である。

4. 等断面円弧材のタワミ角式への温度項導入

タワミ角式で用いたと同様, 温度下降をあらためて正とするとき

$$N_t = \varepsilon t_0 EA \quad (\text{図-4 参照}), \quad \text{---} N_t = H \cos \varphi - V \sin \varphi \quad (\text{図-5 参照})$$

Castigliano の定理より 弾性変形は

$$\tau_{At}^N = \int \frac{N_t}{EA} \frac{\partial N_t}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial s} ds = \frac{1}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \varepsilon t_0 \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$\tau_{Bt}^N = \int \frac{N_t}{EA} \frac{\partial N_t}{\partial M_{BA}} \frac{\partial V}{\partial s} ds = \frac{1}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \varepsilon t_0 \sin \varphi \cdot d\varphi$$

$$\Delta k_{tN} = \int \frac{N_t}{EA} \frac{\partial N_t}{\partial H} ds = r \int_0^\alpha \varepsilon t_0 \cos \varphi \cdot d\varphi$$

$$\text{又 } M_t = \frac{\varepsilon t_0 EI}{d} \quad (\text{図-4 参照}), \quad \text{---} M_t = M_{AB} \frac{r-x}{r} - M_{BA} \frac{x}{r} - H y \quad (\text{図-5})$$

Castigliano の定理より 弾性変形は

$$\tau_{At}^M = \int \frac{M_t}{EI} \frac{\partial M_t}{\partial M_{AB}} ds = \frac{r}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \frac{\varepsilon t_0}{d} (\sin \alpha - \sin \varphi) d\varphi$$

$$\tau_{Bt}^M = \int \frac{M_t}{EI} \frac{\partial M_t}{\partial M_{BA}} ds = -\frac{r}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \frac{\varepsilon t_0}{d} (\sin \alpha + \sin \varphi) d\varphi$$

$$\Delta k_{tM} = \int \frac{M_t}{EI} \frac{\partial M_t}{\partial H} ds = r^2 \int_0^\alpha \frac{\varepsilon t_0}{d} (\cos \alpha - \cos \varphi) d\varphi$$

幾何学的変形 (図-6 参照) は $\tau_{Bt}^N = -(\Delta \varphi - \beta) = -(\Delta \varphi - \frac{\Delta y}{r}) = -\frac{1}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \varepsilon t_0 (\sin \alpha + \sin \varphi) d\varphi$

$$\tau_{At}^N = \Delta \varphi - \beta = \frac{1}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \varepsilon t_0 (\sin \alpha - \sin \varphi) d\varphi, \quad \Delta k_{tN} = \Delta x = r \int_0^\alpha \varepsilon t_0 (\cos \alpha - \cos \varphi) d\varphi$$

よって 曲げモーメント, 軸力, セン断力および温度の影響を考慮した切線角 τ_A, τ_B は

$$\tau_A = \tau_A^M + \tau_A^N + \tau_A^N + \tau_A^S + \tau_{At}^N + \tau_{At}^N + \tau_{At}^N \quad \text{----- (7)} \quad \tau_B = \tau_B^M + \tau_B^N + \tau_B^N + \tau_B^S + \tau_{Bt}^N + \tau_{Bt}^N + \tau_{Bt}^N \quad \text{----- (8)}$$

式 (7), (8) を解き, さらに置換すれば 次式 3 通り (文献 (2) 参照)。

$$M_{AB} = k_{AB} (A_0 \Phi_A + B_0 \Phi_B) + \frac{I_{AB}}{3} (A_0 + B_0) (\bar{x}_B - \bar{x}_A) \sin \mu_{AB} - \frac{I_{AB}}{3} (A_0 + B_0) (\bar{y}_B - \bar{y}_A) \cos \mu_{AB} + \Delta_0 H - C_{AB}$$

$$M_{BA} = k_{AB} (B_0 \Phi_A + A_0 \Phi_B) + \frac{I_{AB}}{3} (A_0 + B_0) (\bar{x}_B - \bar{x}_A) \sin \mu_{AB} - \frac{I_{AB}}{3} (A_0 + B_0) (\bar{y}_B - \bar{y}_A) \cos \mu_{AB} - \Delta_0 H + C_{BA}$$

$$k_{AB} C_{AB} = \frac{1}{\alpha} \{ (A_0 + B_0) (I' + \Lambda) + A_0 (K_1 + \pi_{AB} + \Phi_{AB} + \psi_{AB}) + B_0 (K_2 + \pi_{BA} + \Phi_{BA} + \psi_{BA}) \}$$

$$C_{BA} = -\frac{1}{\alpha} \{ (A_0 + B_0) (I' + \Lambda) + B_0 (K_1 + \pi_{AB} + \Phi_{AB} + \psi_{AB}) + A_0 (K_2 + \pi_{BA} + \Phi_{BA} + \psi_{BA}) \}$$

$$\text{上式中 } \Phi_{AB} = \frac{EI}{2r} \int_0^\alpha \varepsilon t_0 d\varphi = -\frac{\Phi_{BA}}{r}, \quad \psi_{AB} = \frac{EI}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \frac{\varepsilon t_0}{d} (\sin \alpha - \sin \varphi) d\varphi, \quad \psi_{BA} = -\frac{EI}{2 \sin \alpha} \int_0^\alpha \frac{\varepsilon t_0}{d} (\sin \alpha + \sin \varphi) d\varphi$$

次に スパン方程式は $\Delta l_{AB} = \Delta l_M + \Delta l_N + \Delta l_S + \Delta l_{tN} + \Delta l_{tN} + \Delta l_{tM} \quad \text{----- (9)} \quad (9) \text{ 式を解いて } H = \frac{Y}{X}$

$$k_{AB} X = 6\delta - 6\lambda \Lambda_0 + \frac{3V^2(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha)}{\alpha} - \frac{3V^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{\alpha} + \frac{3V^2(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}{\alpha} \frac{2X(m+1)}{m}$$

$$Y = 3\lambda (A_0 - B_0) (\Phi_A - \Phi_B) k_{AB} + I_{AB} \{ (\bar{x}_B - \bar{x}_A) \cos \mu_{AB} + (\bar{y}_B - \bar{y}_A) \sin \mu_{AB} \} - 3\lambda (C_{AB} + C_{BA}) + \frac{6}{W} (N - N_1 - N_2 - S - N_3 - N_4)$$

$$\text{上式中 } N_3 = r \cos \alpha \int_0^\alpha \varepsilon t_0 d\varphi, \quad N_4 = r^2 \int_0^\alpha \frac{\varepsilon t_0}{d} (\cos \alpha - \cos \varphi) d\varphi$$

放物線材への温度項導入も上記円弧材に全く同様に行う。本研究には文部省科学研究費の補助を受けたことを附記する。

文献 (1) K. Mise ; Analysis of Continuous Arch Systems and Theorem of Nine Displacements, 九大工学部紀要 7巻5号, 1935

(2) T. Yamasaki ; Analysis of Frames with Curved Members considering the Effects of Axial and Shearing Forces.

Proc. 11th Japan Nat. Cong. Appl. Mech. Mar. 1962. (3) S.T. Carpenter ; Structural Mechanics, 1960