

I-30 円弧アーチの固有振動数

東京大学工学部 正夏 ○伊藤 学
 全上 学生員 深沢 泰晴

円弧アーチの面内および面外の撓み固有振動についてその一般的な性状を検討するが、特にこれまでほとんど扱われなかった面外への横振動に主眼を置く。一応部材断面は一応と仮定し、端末条件は (I) 両端回転自由と (II) 両端固定の二つの場合を対象とする。

面内振動 (鉛直撓み振動)

古くより F. W. Walthking などのかなり多くの研究が公けられているが、アーチ部材に予め作用している死荷重などによる軸力 N_0 の影響を正しく考慮したものは見られない。この N_0 が圧縮値にくらべて小さくない時は当然その影響を無視することはできない。

図-1 のような円弧アーチの面内変形の際のエネルギーを計算し、変分演算によって次の自由振動の基本方程式が得られる。ただし dash は θ について、dot は時間 t についての偏微分、 w は部材の軸方向の変位を示す。

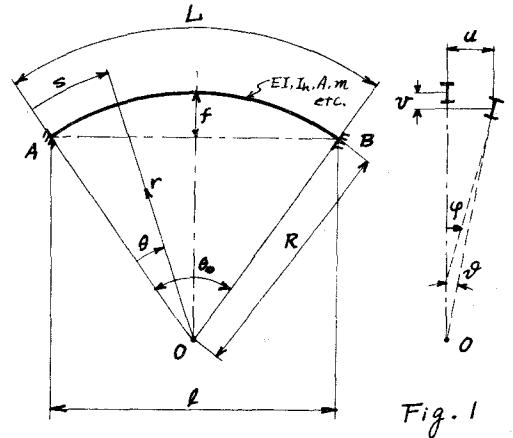


Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} EI(v'''' + w'''') - N_0 R^2 v'' + R^2(EA + N_0)v - R^2(EA + 2N_0)w' + mR^4 \ddot{v} &= 0 \\ EI(w'''' + v'''') + R^2(EA + N_0)w'' - R(EA + 2N_0)v' - N_0 R^2 w - mR^4 \ddot{w} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

エネルギー計算から Ritz の方法で基本固有振動数を求めることも考えられるが、こゝでは上式をもとにして Walthking の行ったと同様な手法で端末条件に着目して振動数方程式を得ることが出来る。

他の諸条件が同じ時はアーチの低次対称型振動形は部材細長比の大小によりかなり異った性質を示し、その値が小さければ最低次振動形は常に2節点を有するものとなる。このほか基本振動形に対応するものが対称型であるか、逆対称型であるかはスパンの大小によっても左右されるであろうこと、軸力と部材断面との関係も振動形に影響を与えるであろうことなど、吊橋の場合と似てような諸因子を予測することが出来る。

面外振動 (横振動)

アーチにおいては横方向の変形はアーチの面に垂直方向の変位 $u = R \cdot \theta$ (図-1) のほかに、部材の振り回転角 φ およびアーチの曲率の中心方向の変位 v によって定まる。横方向に変形する場合アーチ軸線は不伸長と仮定すれば、 $v = \frac{1}{2} R (\frac{d\varphi}{d\theta})^2$ で表わされる。さて図-1 を参照し、もともと作用している鉛直荷重 P のほかに水平等分布荷重 q と等分布振りモーメント m_T が作用した場合の全エネルギーを計算すれば

$$W = \frac{EI_h}{2R} \int_0^{\theta_0} (\vartheta'' + \varphi)^2 d\theta + \frac{GK}{2R} \int_0^{\theta_0} (\vartheta' - \varphi')^2 d\theta + \frac{EC_w}{2R^3} \int_0^{\theta_0} (\vartheta'' - \varphi'')^2 d\theta - \frac{PR^2}{2} \int_0^{\theta_0} \vartheta'^2 \cos(\frac{\theta_0}{2} - \theta) d\theta - m_T R \int_0^{\theta_0} \varphi d\theta - \delta R^2 \int_0^{\theta_0} \vartheta d\theta - \frac{1}{2} PR^2 \int_0^{\theta_0} [\varphi \cos(\frac{\theta_0}{2} - \theta) + (\frac{\theta_0}{2} - \theta) \sin(\frac{\theta_0}{2} - \theta)] \varphi'^2 d\theta \dots (2)$$

こゝに $\delta = (l_p/R)^2$ 、 l_p は断面の極回転半径で、 EI_h 、 GK 、 EC_w はそれぞれ断面の横曲り剛性、振り剛性、曲げ振り剛性を表わす。やはり変分計算により ϑ と φ に関する連立微分方程式が得られるが、部材の剪断中心・重心・荷重作用点が合致し、面の荷重が曲率の中心方向に向うと仮定すると結果はかなり簡単になり、 $\delta = -m_T R \ddot{\vartheta}$ 、 $m_T = -m_i \dot{\varphi}$ とおいて自由振動の方程式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (1+\beta_1)\vartheta'''' - (\alpha-\mu)\vartheta'' - k\vartheta - \beta_1\varphi'''' + (1+\alpha)\varphi'' &= 0 \\ -\beta_1\vartheta'''' + (1+\alpha)\vartheta'' + \beta_1\varphi'''' - (\alpha-\delta\mu)\varphi'' + (1-\delta k)\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

こゝで $k = \omega^2 \cdot \frac{m_T R^2}{EI_h}$ 、 $\alpha = \frac{GK}{EI_h}$ 、 $\beta_1 = \frac{EC_w}{R^2 EI_h}$ 、 $\mu = \frac{PR^3}{EI_h}$ はすべて無次元パラメータである。鉛直振動の場合と同様であるが、固有マトリクスも電子計算機 (FACOM-128) で計算し、 $N_0 = PR = 0$ の時の基本固有振動数を示した一例が図-2 である。両端固定の条件のもとは

$$\vartheta = \sum_n A_n (1 - \cos \frac{2n\pi}{\theta_0} \theta)$$

$$\varphi = \sum_n B_n (1 - \cos \frac{2n\pi}{\theta_0} \theta)$$

とおき、おのおの5項までとっている。

軸力 N_0 を考慮する時面の荷重 p がアークの横断座屈荷重に達していれば振動は起らない。また境界条件 (I) で $N_0 = 0$ の場合は単純支持曲線桁の撓み振動に対応する。

これらの固有振動についてはスパン3mのアーク模型で実験を行い、検討中である。

終りにこの研究に対し、佐野信一郎 (川崎重工、当時卒論生)、林国安 (大学院研究生) の両君の助力を得たことに感謝する。

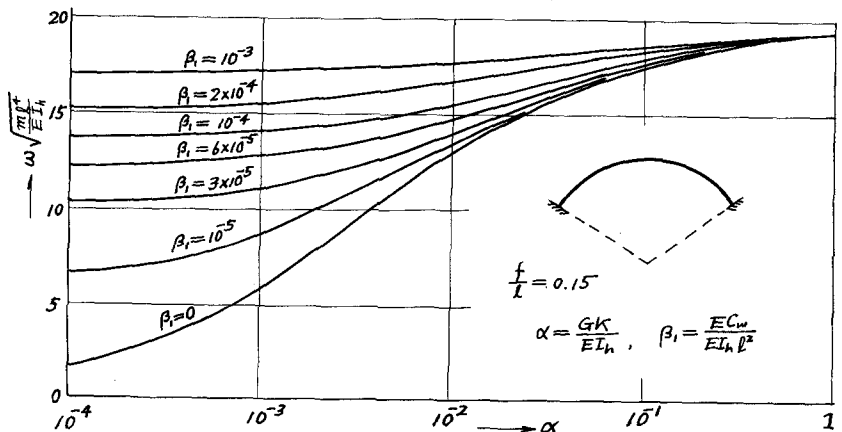
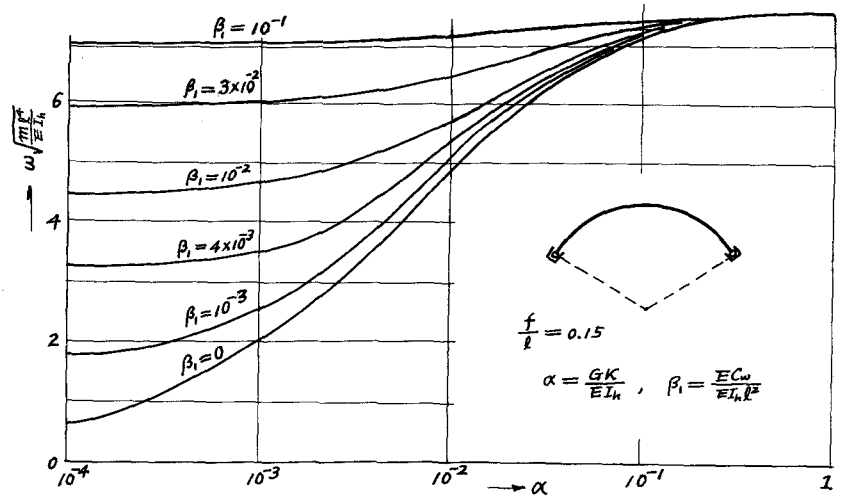


図-2 アークの横方向固有振動数