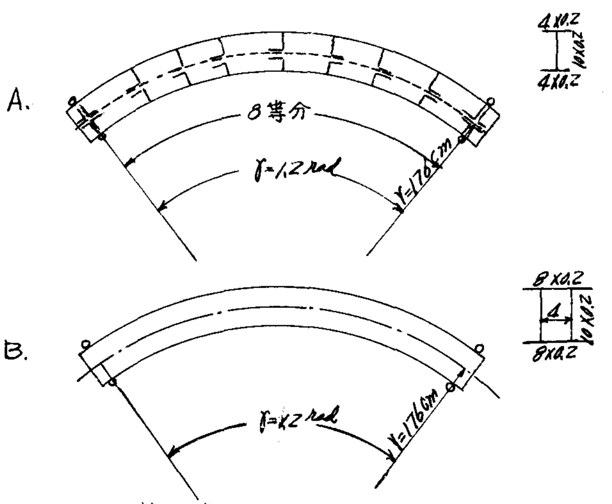
曲線桁に関する一実験について

東北大学　正員 ○ 樋浦 大三
〃　〃　〃〃　浪越　勇

1. 最近高速自動車道路の建設が盛んとなり，曲線橋の必要も多くなってきた。橋梁の大小により，橋梁全体を一本の曲線桁とし，或は曲線桁を併列した曲線格子，またはそれを多径間にわたる連続構造としたものなど多種多様である。いずれにしても単一曲線桁の解が基礎となるので単一曲線桁のたわみ，応力を模型を作って測定してみた。

2. 模型は真鍮で作り，A，B 2種とした。Aは I 型断面，Bは箱(II)型断面とした。いずれも中心角 $\gamma=1.2$ ラジアン半径 176cm とした。Aには補剛材として真鍮の山型 $2\times2\times0.2$ を用いた。両端には4個，中間8等分して2個づつがっちりとりつけた。



Bには補剛材は用いなかった。単に支点において腹板に板をハンダ付けし厚さを増して補強するにとどめた。
これらの曲線桁を両端半径方向の一本のローラーにのせ，且つ挾み端として，垂直荷重をかけることにした。

3. たわみ (w) と捩れ角 (θ)

桁の断面形状如何によっては曲げ捩り剛性が大いに関係する。曲げ捩りを考慮に入れた，たわみ角を求める基本の式は既に倉西父子によって導かれている

$$-\frac{EC_{bd}}{r^2}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^4\theta}{d\varphi^4}+\left(GJ_d-\frac{EC_{bd}}{r^2}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}+GJ_d\cdot\frac{1}{r^2}\theta=-\frac{M}{r}\left(1+\frac{GJ_d}{EI}\right)+\frac{1}{r}\cdot\frac{EC_{bd}}{r^2}\cdot\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{d^2M}{d\varphi^2}-m_x$$

$$=-\frac{M}{r}\left(1+\frac{GJ_d}{EI}+\frac{EC_{bd}}{r^2}\cdot\frac{1}{EI}\right)\frac{M}{r}-\left(1+\frac{EC_{bd}}{r^2}\cdot\frac{1}{EI}\right)m_x-\frac{EC_{bd}}{r^2}\frac{1}{EI}\cdot rq$$

$$+\frac{EC_{bd}}{r^2}\cdot\frac{1}{EI}\cdot\frac{dm_y}{d\varphi}\quad\text{------------}(1)$$

M が既知のときはこれから θ を求めることが出来る。w は次式より求めることができる。

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2}=-r\theta-\frac{r^2}{EI}M\quad\text{--------------}(2)$$

更に変形してたわみと捩れ角と荷重との直接の関係を導くと次のようになる。

$$\frac{EI}{GJ_d}=K_1,\qquad \frac{EC_{bd}}{r^2}\frac{1}{GJ_d}=K_2 \text{ とすると，}$$

$$-K_1^2\frac{d^{10}w}{d\psi^{10}}+(K_1+K_2-2)K_2\frac{d^8w}{d\psi^8}+(2K_1K_2+3K_2+K_2^2-K_1-1)\frac{d^6w}{d\psi^6}+(K_1K_2+K_2^2-2K_1-2)\frac{d^4w}{d\psi^4}-(K_1+1)\frac{d^2w}{d\psi^2}$$

$$=\frac{\gamma^4}{EI}\left\{K_1(K_1+K_2+1)q-(1+K_1)(1+K_2)\frac{d^2q}{d\psi^2}+(K_1+K_2-2)K_2\frac{d^4q}{d\psi^4}-K_2^2\frac{d^6q}{d\psi^6}\right\}$$

$$-\frac{\gamma^3}{EI}\left\{(K_1+1)(K_1+K_2+1)\frac{d^2m_x}{d\psi^2}-K_2(2K_1+K_2+2)\frac{d^4m_x}{d\psi^4}+K_2^2\frac{d^6m_x}{d\psi^6}\right\}-\frac{\gamma^3}{EI}\left\{K_1(K_1+K_2+1)\frac{dm_y}{d\psi}-(K_1+1)(K_2+1)\frac{d^3m_y}{d\psi^3}\right.$$

$$\left.+K_2(K_1-K_2)\frac{d^5m_y}{d\psi^5}-K_2^2\frac{d^7m_y}{d\psi^7}\right\} \text{--------------- (3)}$$

$$-K_2(K_1+K_2)\frac{d^6\theta}{d\psi^6}+(K_1-K_2+K_1K_2)\frac{d^4\theta}{d\psi^4}-(K_2^2+K_1K_2-2K_1-2K_2)\frac{d^2\theta}{d\psi^2}+(K_1+K_2)\theta=\frac{\gamma^3}{EI}\left\{(K_1+1)(K_1+K_2)q-(K_1+K_2)K_2\frac{d^2q}{d\psi^2}\right\}$$

$$+\frac{\gamma^2}{EI}\left\{(K_1+K_2)m_x-(K_1+K_2)^2\frac{d^2m_x}{d\psi^2}\right\}+\frac{\gamma^2}{EI}\left\{(K_2-K_1^2-K_1K_2-K_1)\frac{dm_y}{d\psi}-(K_1+K_2)K_2\frac{d^3m_y}{d\psi^3}\right\} \text{------ (4)}$$

となる。

βの点に集中荷重Pが作用するとき,両端単純支持,捩りに対し固定,反り自由とすると普通K_2はK_1に比し極めて小さいから

$$w=\frac{P\gamma^3}{EI}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+K_1\left(\frac{\gamma}{n\pi}\right)^2+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2+1\right\}}{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^4-2\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2+1+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^6-2\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^4+\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2\right\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\psi}{\gamma} \text{-------- (5)}$$

$$\theta=\frac{P\gamma^2}{EI}\cdot\frac{\alpha}{\gamma}\sum\frac{1+K_1+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2+1\right\}}{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^4-2\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^6+\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2+1\right\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\psi}{\gamma} \text{-------- (6)}$$

となる。

今じ問題を(1)式に若干の近似を施して解いてみる。γが小さいときはMは充分な精度をもって三角形で表すことができる。これを$\sin$ seriesで表すと(1)式は

$$-K_2\frac{d^4\theta}{d\psi^4}+(1-K_2)\frac{d^2\theta}{d\psi}+\theta=-\frac{P\gamma^2}{EI}(1+K_1+K_2)\frac{2\gamma}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\psi}{\gamma}$$

と置くことができる。この解は $\mu^2=\dfrac{1}{K_2}$ と置くと

$$\theta=A\sin\psi+B\sinh\mu\psi+C\cos\psi+D\cosh\mu\psi+\frac{P\gamma^2}{EI}\frac{2\gamma}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\frac{1+K_1+K_2}{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2-1+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^4-\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2\right\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\psi}{\gamma}$$

--------- (7)

となりwは(2)式より求められる。

両端単純支持,捩りに対して固定,反り自由とすれば

$$\theta=\frac{P\gamma^2}{EI}\frac{2\gamma}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\frac{1+K_1+K_2}{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2-1+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^4-\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2\right\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\psi}{\gamma} \text{-------------- (8)}$$

$$w=\frac{P\gamma^3}{EI}\frac{\alpha}{\gamma}\sum\frac{1+K_1\left(\frac{\gamma}{n\pi}\right)^2+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2-1+\left(\frac{\gamma}{n\pi}\right)^2\right\}}{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^4-\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2+K_2\left\{\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^6-\left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^4\right\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\psi}{\gamma} \text{------------- (9)}$$

更に両端単純支持,捩りに対し固定,反り固定とすれば

$$A=\frac{\sin\gamma\sinh\mu\gamma+\mu(\cos\gamma+1)(\cosh\mu\gamma-1)}{2\mu(1-\cos\gamma\cosh\mu\gamma)+(\mu^2-1)\sin\gamma\sinh\mu\gamma}F$$

$$B=-\frac{\mu\sin\gamma\sinh\mu\gamma+(\cos\gamma+1)(\cosh\mu\gamma-1)+2(1-\cos\gamma\cosh\mu\gamma)}{\alpha\mu(1-\cos\gamma\cosh\mu\gamma)+(\mu^2-1)\sin\gamma\sinh\mu\gamma}F$$

$$C=\frac{(\cos\gamma-1)\sinh\mu\gamma-\mu\sin\gamma(\cosh\mu\gamma-1)}{''}F$$

$$D=-C$$

$$F=\frac{Pr^2}{EI}\sum\frac{\alpha}{n\pi}\frac{1+K_1+K_2}{(\frac{n\pi}{\gamma})^2-1+K_2\{(\frac{n\pi}{\gamma})^4-(\frac{n\pi}{\gamma})^2\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}$$

と置くと

$$\theta=A\sin\varphi+B\sinh\mu\varphi+C\cos\varphi+D\cosh\mu\varphi+\frac{Pr^2}{EI}\frac{2\gamma}{\pi^2}\sum\frac{1}{n^2}\frac{1+K_1+K_2}{(\frac{n\pi}{\gamma})^2-1+K_2\{(\frac{n\pi}{\gamma})^4-(\frac{n\pi}{\gamma})^2\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\varphi}{\gamma}\text{ ----(10)}$$

$$\omega=Ar\{\sin\varphi-\frac{\sin\gamma}{\gamma}\varphi\}-Br\frac{1}{\mu^2}\{\sinh\mu\varphi-\frac{\sinh\mu\gamma}{\gamma}\varphi\}+Cr\{(\cos\varphi-1)-\frac{(\cos\gamma-1)}{\gamma}\varphi\}-Dr\frac{1}{\mu^2}\{(\cosh\mu\varphi-1)-\frac{\cosh\mu\gamma-1}{\gamma}\varphi\}$$
$$+\frac{Pr^3}{EI}\frac{\alpha}{\gamma}\sum\frac{1+K_1(\frac{\gamma}{n\pi})^2+K_2\{(\frac{n\pi}{\gamma})^2-1+(\frac{\gamma}{n\pi})^2\}}{(\frac{n\pi}{\gamma})^4-(\frac{n\pi}{\gamma})^2+K_2\{(\frac{n\pi}{\gamma})^6-(\frac{n\pi}{\gamma})^4\}}\sin\frac{n\pi\beta}{\gamma}\sin\frac{n\pi\varphi}{\gamma}\text{ ---------(11)}$$

となる。

更に特別の場合として集中荷重Pが$\beta=\frac{\gamma}{\alpha}$に作用するとき(1)式をそのまゝ解くと次のようになる。

$$\omega=\frac{Pr^3}{EI}\Big[\frac{\sin\frac{\gamma}{\alpha}}{\sin\gamma}(\sin\varphi-\varphi\cos\frac{\gamma}{\alpha})-\frac{1+K_1+K_2}{1+K_2}\cdot\frac{1}{4}\{(\tan\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}\tan\frac{\gamma}{\alpha}+1+\frac{\alpha}{1+\mu^2})\varphi+(\frac{\gamma}{\alpha}\tan\frac{\gamma}{\alpha}-1-\frac{\alpha}{1+\mu^2})\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\sin\varphi$$
$$+\frac{\alpha}{\mu^2(1+\mu^2)}+\frac{\alpha}{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\cos\varphi+\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\varphi\sin\varphi-\frac{\alpha}{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}-\frac{1}{\mu^3(1+\mu^2)}\frac{\alpha}{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\sinh\mu\varphi\}\Big]\text{ ----------(12)}$$

$$\theta=\frac{Pr^2}{EI}\frac{1+K_1+K_2}{1+K_2}\frac{1}{4}\{(\frac{\gamma}{\alpha}\tan\frac{\gamma}{\alpha}-1-\frac{\alpha}{1+\mu^2})\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\sin\varphi+\frac{1}{\cos\frac{\gamma}{\alpha}}\varphi\cos\varphi+\frac{\alpha}{\mu(1+\mu^2)}\frac{1}{\cosh\frac{\mu\gamma}{\alpha}}\sinh\mu\varphi\}\text{ ------(13)}$$

4. 集中荷重Pがβの点に作用するときF. Wanslebenに従って曲線桁としての捩りモーメントを求め,この捩りモーメントが曲線桁を引き延した直桁に作用するものとしてθを求め,次にωを求めると

$$0<\varphi<\beta$$

$$\omega=\frac{Pr^3}{EI}\Big[K_1\{\frac{1}{1+\mu^2}(\frac{1}{\mu^3}\frac{\sinh\mu\beta'}{\sinh\mu\gamma}\sinh\mu\varphi-\frac{1}{\mu^2}\frac{\beta'}{\gamma}\varphi)-\frac{\mu^2}{1+\mu^2}(\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma}\sin\varphi-\frac{\beta'}{\gamma}\varphi)$$
$$+\frac{\beta'}{6\gamma}\varphi^3-\frac{\beta\beta'}{6\gamma}(\beta+\gamma)\varphi+(\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma}\sin\varphi-\frac{\beta'}{\gamma}\varphi)\Big]\text{ ------------(14)}$$

$$\theta=\frac{Pr^2}{EI}K_1\{\frac{1}{\mu(1+\mu^2)}\frac{\sinh\mu\beta'}{\sinh\mu\gamma}\sinh\mu\varphi+\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma}\sin\varphi-\frac{\beta'}{\gamma}\varphi\}\text{ --------(15)}$$

$$\beta<\varphi<\gamma$$

$$\omega=\frac{Pr^3}{EI}\Big[K_1\{\frac{1}{1+\mu^2}(\frac{1}{\mu^3}\frac{\sinh\mu\beta}{\sinh\mu\gamma}\sinh\mu\varphi'-\frac{1}{\mu^2}\frac{\beta}{\gamma}\varphi')-\frac{\mu^2}{1+\mu^2}(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\sin\varphi'-\frac{\beta}{\gamma}\varphi')$$
$$+\frac{\beta}{6\gamma}\varphi'^3-\frac{\beta'\beta}{\gamma}(\gamma+\beta')\varphi'+(\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma}\sin\varphi'-\frac{\beta}{\gamma}\varphi')\Big]\text{ -----------(16)}$$

$$\theta=\frac{Pr^2}{EI}K_1(\frac{1}{\mu(1+\mu^2)}\frac{\sinh\mu\beta}{\sinh\mu\gamma}\sinh\mu\varphi'+\frac{\mu^2}{1+\mu^2}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\sin\varphi'-\frac{\beta}{\gamma}\varphi')\text{ ---------(17)}$$

たゞし　$\gamma-\beta=\beta'$,　$\gamma-\varphi=\varphi'$

5. K_1に比較してK_2が極めて小さいときはω,θともにK_2の影響は極めて小さい。いま極限の場合として$K_2=0$を考え，θもωも載荷点において連続として(1)式から求めると

$$\omega=\frac{Pr^3}{EI}\Big[(1+K_1)\frac{1}{2\sin^2\gamma}\{\sin\gamma\sin\beta'\varphi\cos\varphi-(\beta\sin\beta'\cos\gamma-\beta'\sin\beta+\sin\beta'\sin\gamma)\sin\varphi\}$$

$$+K_1\Big\{\frac{\beta'}{\gamma}\varphi-\frac{\sin\beta'}{\sin\gamma}\sin\varphi\Big\}\Big] \text{ ---------- } (18)$$

$$\theta=\frac{Pr^2}{EI}(1+K_1)\frac{1}{2\sin^2\gamma}\{\sin\gamma\sin\beta'\varphi\cos\varphi-(\beta\sin\beta'\cos\gamma-\beta'\sin\beta+\sin\beta'\sin\gamma)\sin\varphi\}$$

$$\text{ ---------- } (19)$$

$\beta<\varphi<\gamma$　　　$\gamma-\varphi=\varphi'$

$$\omega=\frac{Pr^3}{EI}\Big[(1+K_1)\frac{1}{2\sin^2\gamma}\{\sin\gamma\sin\beta\varphi'\cos\varphi'-(\beta'\sin\beta\cos\gamma-\beta\sin\beta'+\sin\beta\sin\gamma)\sin\varphi'\}$$

$$+K_1\Big\{\frac{\beta}{\gamma}\varphi'-\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\sin\varphi'\Big]\text{ ------------ } (20)$$

$$\theta=\frac{Pr^2}{EI}(1+K_1)\frac{1}{2\sin^2\gamma}\{\sin\gamma\sin\beta\varphi'\cos\varphi'-(\beta'\sin\beta\cos\gamma-\beta\sin\beta'+\sin\beta\sin\gamma)\sin\varphi'\}\text{ --- } (21)$$

6. 桁の直応力は曲げによるものと反りの変化にもとずくものを加算して

$$\sigma=\sigma_m+\sigma_{bd}=\frac{M}{EI}\cdot\frac{h}{2}+EW_u\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2\theta}{d\varphi^2}\text{ --------------- } (22)$$

たゞし反りをWとすると

$$W=W_u\frac{d\theta}{rd\varphi}$$

7. A桁中央に1 kgかけたときの中央点のたわみとして次の値が得られた。

(a) 補剛材の上下フランジにハンダづけされているとき．　0.63 cm

(b) 中間補剛材のみの上下をフランジから自由にしたとき．　0.66 〃

(c) 全部の補剛材の上下をフランジから自由にしたとき．　0.73 〃

これに対し計算値は

(5)式によるもの　1.13 cm.

(9)　〃　〃　0.97 〃

(11)　〃　〃　0.63 〃

(14)　〃　〃　0.30 〃

(20)　〃　〃　1.87 〃

となる　その他の事は当日述べる。