

# V-19 扇形平板の曲げについて

北大工学部 正員 茅 村 仁

2辺が放射方向の直線辺、他の2辺が半径の異なる2分の円弧で境せられている平板を扇形平板と名付けることにする。

要旨 曲線橋の基本的な形を平板構造的にみると扇形平板と考えることができる。平板構造では2つの直交方向で弾性的性質が異なる場合が一般的であるので筆者は先に曲線直交異方性平板の基本微分方程式を誘導した<sup>1)</sup>。その解法に有限なFourier sine変換を適用することによりいかなる荷重が曲線直交異方性扇形平板に作用していてもその有限Fourier sine変換を求めれば、2直線辺が単純支持の場合、2円弧辺が任意の境界条件を有していても解きうることを示した。

基本微分方程式 極座標を採用し、 $r$ 方向と $\theta$ 方向とで弾性的性質を異にする鉄筋コンクリート板、リブ付板その他において、 $r, \theta$ 方向の弾性係数を $E_r, E_\theta$ 、ポアソン比を $\nu_r, \nu_\theta$ とし厚さ一定で普通平板と同じ誘導の仮定を設けると筆者が誘導した基本微分方程式は次の通りである。(詳細は後記文献参照)。

$$\begin{aligned} p = & N_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{(2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r)}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{[N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \\ & - \frac{[2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu)]}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{[2N_\theta + 2N(1-\nu) + 2N_r \nu_\theta]}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{N_\theta}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \\ & - \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^4} \quad \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

これが曲線直交異方性平板の基本微分方程式である。(1)式中、 $p$ は鉛直荷重でありまた、

$$N_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad N_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}$$

である。

基本微分方程式の解法 (1)式は $r$ と $\theta$ に関する4階の偏微分方程式である。これに区画  $0 < \theta < \alpha$  で $\theta$ に関する有限Fourier sine変換を適用すると $w_s(r, \beta) \in (w(r, \theta))$ のsine変換、 $\beta = \frac{n\pi}{\alpha}$ 、 $\alpha =$ 中心角とすれば、結局次のようになる<sup>2)</sup>。

$$\begin{aligned} & N_r w_s''''(r, \beta) + \frac{[2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r]}{r} w_s'''(r, \beta) \\ & - \frac{[N_\theta + \beta^2(N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu))]}{r^2} w_s''(r, \beta) \\ & + \frac{[N_\theta + \beta^2(2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu))]}{r^3} w_s'(r, \beta) + \frac{[\beta^4 N_\theta - \beta^2(2N_\theta + 2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu))]}{r^4} w_s(r, \beta) = S\{p(r, \theta)\} \\ & + \frac{[N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \times \beta^2 [(-1)^n w''(r, \alpha) - w''(r, 0)] - \frac{[2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu)]}{r^3} \times \quad (\text{2R2へ}) \end{aligned}$$

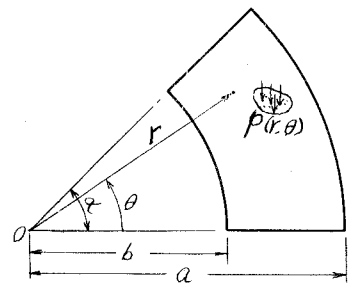


図-1.

$$\times \beta [(-1)^n w'(r, \alpha) - w'(r, 0)] + \frac{[2N_0 + 2N_0 v_0 + 2N(1-v)]}{r^4} \beta [(-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0)] \\ - \frac{\beta}{r^4} \left\{ (-1)^n \left[ \frac{(M_0)_{\theta=\alpha}}{N_0} + r w(r, \alpha) + v_r w''(r, \alpha) \right] - \left[ \frac{(M_0)_{\theta=0}}{N_0} + r w'(r, 0) + v_r w''(r, 0) \right] \right\} \quad (2)$$

この式の右辺の1項は荷重の sine 変換であり、2項以下は扇形平板の  $\theta = 0, \theta = \alpha$  での  $w$  の境界値が入っている。2直線辺が単純支持の場合は2項以下はすべて0となり1項のみが残る。従っていかなる荷重状態であってもその sine 変換を求めれば容易に扇形平板の問題を解くことができる。

荷重の誘導に当り換りモーメント  $M_{r0} = M_{\theta r} = -N(1-v) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$  としたがこの  $N, v$  の代りに  $w$  の直交軸方向に対する板剛度およびポアソン比の幾何平均値でおきかえると  $M_{r0} = -(1-\sqrt{v_0 v_r}) \sqrt{N_0 N_r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$  となる。今  $N_0/N_r = C^2$  (3)

とすると(2)式は

$$w_s'''' + 2 \frac{w_s'''}{r} - [C^2 + 2C\beta^2] \frac{w_s''}{r^2} + [C^2 + 2C\beta^2] \frac{w_s'}{r^3} + \beta^2 [\beta^2 C^2 - (2C^2 + 2C)] \frac{w_s}{r^4} = \delta \left\{ \frac{p(\theta, \theta)}{N_r} \right\} \quad (4)$$

与えられた  $C$  に対し  $w_s = r^\lambda$  とおき4次の特性方程式の根を求め、また荷重の sine Transform を考慮して特解を求めると問題は解決する。  $\lambda$  に関する4次の特性方程式の係数は実数であるからその根は一般に次のような2組の共役複素根で表される。

$$\lambda_1, \lambda_2 = A_{in} \pm i B_{in}, \quad \lambda_3, \lambda_4 = A_{en} \pm i B_{en}, \quad (i = \sqrt{-1})$$

従って求める解の式  $w_s(r, \beta)$  は  $C_1, C_2, C_3$  および  $C_4$  を未定係数、  $P(r, \beta)$  を特解とすると次のように表すことができる。

$$w_s = C_1 r^{A_{in}} \cos(B_{in} \log r) + C_2 r^{A_{in}} \sin(B_{in} \log r) + C_3 r^{A_{en}} \cos(B_{en} \log r) + C_4 r^{A_{en}} \sin(B_{en} \log r) + P(r, \beta) \quad (5)$$

$A_{in}, A_{en}, B_{in}$  および  $B_{en}$  は4次代数方程式の係数間の関係ではめりうるものである。

$w_s$  が求めれば Fourier Transform の定理により求める  $w(r, \theta)$  は  $w_s(r, \beta)$  の逆変換として

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,3,\dots} w_s \left( r, \frac{n\pi}{\alpha} \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \quad (0 < \theta < \alpha, n=1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

で求められ断面力、反力等は次の諸式より求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + C^2 v_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -C^2 N_r \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + v_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] & M_{r\theta} &= -(1-C^2 v_r) C^2 N_r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ Q_r &= -N_r \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2} - \frac{C^2 \partial^2 w}{r^2 \partial r} - \frac{C^2 (2+C^2 v_r - C^2 v_r)}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} C^2 (C^2 v_r - v_r - 1) \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right] \\ Q_\theta &= -N_r \left[ \frac{C^2 \partial^3 w}{r^2 \partial \theta} - \frac{C^2 (C^2 v_r - v_r - 1)}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{C^2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right] \\ V_r &= -N_r \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{C^2 \partial^2 w}{r^2 \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2} - \frac{C^2}{r^3} (v_r - 2C^2 v_r + 3) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{C^2}{r^2} (2+v_r - 2C^2 v_r) \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right] \\ V_\theta &= -N_r \left[ -\frac{C^2}{r^2} (1-2C^2 v_r) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{C^2 (2+v_r - 2C^2 v_r)}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{C^2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{2C^2 (1-C^2 v_r)}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

- 2ヶの内弧辺の境界条件 (1) 固定の場合  $r=a$  または  $b$  にて  $w=0, \frac{\partial w}{\partial r}=0 \dots (8)$   
 (2) 単純支持の場合  $r=a$  または  $b$  にて  $w=0, M_r=0 \dots (9)$   
 (3) 自由辺の場合  $r=a$  または  $b$  にて  $M_r=0, V_r=0 \dots (10)$

これらの条件の組合せにより合計9種類の境界条件について解くことができる。  
 等分布荷重荷重の場合 この場合は  $p(r, \theta) = q_0 (\text{const.})$  とすると  $q_0$  の sine 変換  $S\{q_0\}$  は  

$$S\{q_0\} = \frac{q_0 [1 - (-1)^n]}{\beta^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

であるからこの場合の特解  $P(r, \beta)$  は 
$$P(r, \beta) = \frac{q_0 r^4 [1 - (-1)^n]}{\{ \xi^2 \beta^4 - [18C + 2C^2] \beta^2 + (72 - 8C^2) \} \beta^4 N_r} \dots (11)$$

となる。(5)(11)および(7)式を考慮して(8)(9)(10)なる境界条件を適用すると種々の境界条件の平板に荷重等分布荷重が作用している場合の係数決定方程式が得られる。これを解いて  $C_1 \sim C_4$  を決定すれば(6)式で撓み  $w$  が求まり(7)式で必要な断面力、反力が求められる。後記文献の中で筆者は  $C=1$  の時の数種の境界条件に対する係数決定方程式を Matrix 表示した<sup>3)</sup>。一例として2内弧辺が単純支持の場合および自由辺である場合の撓み  $w$  を中心角  $\alpha$  が  $\frac{\pi}{6}$  で  $\frac{\text{中央内弧長}}{\text{半径}} = 1.0$  の場合につき求めた結果が図-2, 3

である。尚周辺単純支持の正方形板に荷重等分布荷重による中央点の撓みは  $0.00406 \frac{q_0 a^4}{N}$  ( $a$  は辺長) でありまた二対辺自由、二対辺単純支持の中央点の撓みは  $0.01302 \frac{q_0 a^4}{N}$  である。

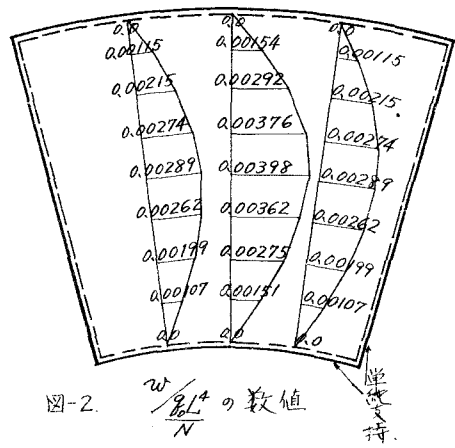


図-2.  $\frac{w}{\frac{q_0 L^4}{N}}$  の数値

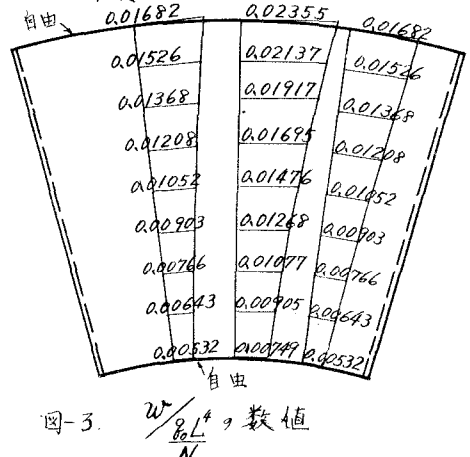


図-3.  $\frac{w}{\frac{q_0 L^4}{N}}$  の数値

集中荷重が作用する扇形平板 平板内の任意の点 ( $r=r_c, \theta=\theta_c$ ) に集中荷重  $P$  が作用する場合を考える。図-4のように平板を2つに分け  $r=r_c$  の線の内側を①、外側を②とする。各々の平板に対して(4)の微分方程式 (homogeneous equation) が有効である。2直線辺での境界条件は単純支持の場合すでに満足されているから残り4ヶの未定係数を決めるのに4ヶを周辺の条件((6)(9),(10))で他の4ヶを  $r=r_c$  での連続条件で決定する。便宜上①の平板の撓みを  $w(r, \theta)$ 、②の平板の撓みを  $w'(r, \theta)$  とすると

$$w(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_1 r^{An} \cos(B_n \log r) + C_2 r^{An} \sin(B_n \log r) + C_3 r^{An} \cos(B_n \log r) + C_4 r^{An} \sin(B_n \log r) \} \sin \theta$$

$$w'(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_1' r^{An} \cos(B_n \log r) + C_2' r^{An} \sin(B_n \log r) + C_3' r^{An} \cos(B_n \log r) + C_4' r^{An} \sin(B_n \log r) \} \sin \theta$$

$r=r_c$  なる円弧上での連続の条件は次のようになる。  
 $r=r_c$  において  $w=w'$

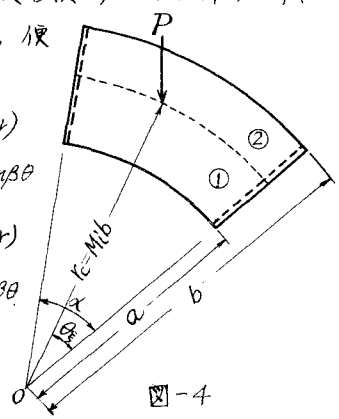


図-4

$r = r_c$  において

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w'}{\partial r'}$$

"

$$M_r = M_r'$$

"

$$Q_r - Q_r' = p(\theta) = \frac{2P}{\alpha r_c} \sum \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \cdot \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}$$

最後の条件はせん断力と荷重の釣合いの条件で右辺は荷重  $P$  を  $r = r_c$  の円弧上に Fourier 級数に展開したものである。この4つの連続条件と円辺の4つの条件で8つの未知係数決定の方程式ができてこれを解くことにより  $C_1 \rightarrow C_4'$  の未知係数が決定できる。一例として  $C = 1$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ , 辺長比が1:1の扇形平板の中央点に  $P$  が作用した場合の撓み  $w$  を  $\theta = \frac{\alpha}{4}, \frac{\alpha}{2}, \frac{3\alpha}{4}$  の位置で求めると図-5のようになる。

### 参考文献

- 1) 2) 3) 芳村 仁: 扇形平板の曲げについて—曲線橋の平板構造としての考察—昭和36年2月「技術資料」第17号、土木学会北海道支部

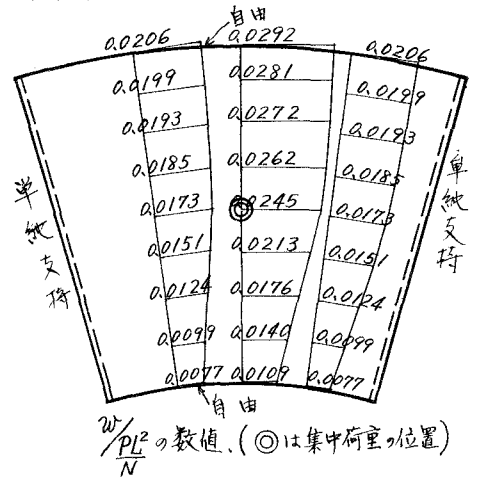


図-5