V—17 KDC-1によるMatrix Inversion, および, Matrix Equation $AX=\lambda BX$のプログラミングの研究

京都大学 正員 成岡昌夫
○ 松尾橋梁 正員 山本知弘

1. はしがき

京都大学電子計算機（Kyoto Univ. Digital Computer-1）が設置されて以来，われわれは，KDC-1の構造解析に対する応用を研究し，そのprogrammingの研究を行なってきた。ここに，その研究の一部であるMatrix Inversion，および，Matrix Equation $AX=\lambda BX$ のprogramが完成したので発表する。紙面の都合から，これらのflow chart，および，programは省略し，講演当日に説明する。

2. Matrix Inversion

われわれが作成した逆行列のprogramは，Crout法によってcodingしたものであって，その計算方法は，良く知られているので省略する。計算時間はquick bandを使用して，18元の場合は12分，17元の場合は10分である。計算結果を計算機内部のドラムから引き出して，印刷するに要する時間は，約15分である。従って，18元または17元のinput dataをphoto-electric tape readerから計算機に読み込ませ，逆行列の値を計算し，求められた計算結果を印刷するに必要な時間は，約30分である。

KDC-1の記憶容量は，4200 wordsで，このうち200 wordsはquick access bandである。従って，KDC-1によって解きうる逆行列の元数は，44元までであるが，分割法によれば88元まで可能となるので，この程度で十分であろうと考える。

ここに述べるMatrix Inversionは，一般的な場合であるので，特に，対称である必要はないが，構造解析上の問題では，対称行列の場合が多いので，対称行列の逆行列を計計するprogramも，追って作成したいと考えている。

3. Matrix Equation $AX=\lambda BX$

固有値問題 $AX=\lambda BX$ を，Hessenberg法によって展開し，特性方程式を求め，これを解いて固有値を計算する。なお，計算に先だって，$AX=\lambda BX$ を $B^{-1}AX=\lambda B^{-1}BX=\lambda IX$，

$$
\begin{array}{c|cccc|cccc}
 & h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & 0 & z_{22} & 0 & 0 \\
 & h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & 0 & z_{32} & z_{33} & 0 \\
 & h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & 0 & z_{42} & z_{43} & z_{44} \\
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\
 & 0 & 0 & 1 & f_{10} & 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\
 & 0 & 1 & f_{21} & f_{20} & 0 & 0 & p_{33} & p_{34} \\
 & 1 & f_{32} & f_{31} & f_{30} & 0 & 0 & 0 & p_{44} \\
\hline
1 & f_{43} & f_{42} & f_{41} & f_{40} & & & &
\end{array}
$$

$$\lambda^4 + f_{43}\lambda^3 + f_{42}\lambda^2 + f_{41}\lambda + f_{40} = 0 \qquad (1)$$

すなわち,

$$HX = \lambda X \tag{2}$$

と変形してから計算を行う。

今, 4元の場合を例にとって, Hessenberg の展開の手順を示せば, 次のようである。

$$p_{11} = -(h_{11}\cdot 1 + h_{12}\cdot 0 + h_{13}\cdot 0 + h_{14}\cdot 0)/1$$

$$z_{22} = h_{21}\cdot 1 + h_{22}\cdot 0 + h_{23}\cdot 0 + h_{24}\cdot 0 + 0\cdot p_{11}$$

$$z_{32} = h_{31}\cdot 1 + h_{32}\cdot 0 + h_{33}\cdot 0 + h_{34}\cdot 0 + 0\cdot p_{11}$$

$$z_{42} = h_{41}\cdot 1 + h_{42}\cdot 0 + h_{43}\cdot 0 + h_{44}\cdot 0 + 0\cdot p_{11}$$

$$p_{12} = -(h_{11}\cdot 0 + h_{12}\cdot z_{22} + h_{13}\cdot z_{32} + h_{14}\cdot z_{42})/1$$

$$p_{22} = -(h_{21}\cdot 0 + h_{22}\cdot z_{22} + h_{23}\cdot z_{32} + h_{24}\cdot z_{42} + 0\cdot p_{12})/z_{22}$$

$$z_{33} = h_{31}\cdot 0 + h_{32}\cdot z_{22} + h_{33}\cdot z_{32} + h_{34}\cdot z_{42} + 0\cdot p_{12} + z_{32}\cdot p_{22}$$

$$z_{43} = h_{41}\cdot 0 + h_{42}\cdot z_{22} + h_{43}\cdot z_{32} + h_{44}\cdot z_{42} + 0\cdot p_{12} + z_{42}\cdot p_{22}$$

$$p_{13} = -(h_{11}\cdot 0 + h_{12}\cdot 0 + h_{13}\cdot z_{33} + h_{14}\cdot z_{43})/1$$

$$p_{23} = -(h_{21}\cdot 0 + h_{22}\cdot 0 + h_{23}\cdot z_{33} + h_{24}\cdot z_{43} + 0\cdot p_{13})/z_{22}$$

$$p_{33} = -(h_{31}\cdot 0 + h_{32}\cdot 0 + h_{33}\cdot z_{33} + h_{34}\cdot z_{43} + 0\cdot p_{13} + z_{32}p_{23})/z_{33}$$

$$z_{44} = h_{41}\cdot 0 + h_{42}\cdot 0 + h_{43}\cdot z_{33} + h_{44}\cdot z_{43} + 0\cdot p_{13} + z_{42}p_{23} + z_{43}p_{33}$$

$$p_{14} = -(h_{11}\cdot 0 + h_{12}\cdot 0 + h_{13}\cdot 0 + h_{14}\cdot z_{44})/1$$

$$p_{24} = -(h_{21}\cdot 0 + h_{22}\cdot 0 + h_{23}\cdot 0 + h_{24}\cdot z_{44} + 0\cdot p_{14})/z_{22}$$

$$p_{34} = -(h_{31}\cdot 0 + h_{32}\cdot 0 + h_{33}\cdot 0 + h_{34}\cdot z_{44} + 0\cdot p_{14} + z_{32}p_{24})/z_{33}$$

$$p_{44} = -(h_{41}\cdot 0 + h_{42}\cdot 0 + h_{43}\cdot 0 + h_{44}\cdot z_{44} + 0\cdot p_{14} + z_{42}p_{24} + z_{43}p_{34})/z_{44}$$

f_{ij} は次のように計算する。

$$f_{10} = 1\cdot p_{11}$$

$$f_{20} = 1\cdot p_{12} + f_{10}p_{22}$$

$$f_{21} = (0\cdot p_{12} + 1\cdot p_{22}) + f_{10}$$

$$f_{30} = 1\cdot p_{13} + f_{10}p_{23} + f_{20}p_{33}$$

$$f_{31} = (0\cdot p_{13} + 1\cdot p_{23} + f_{21}p_{33}) + f_{20}$$

$$f_{32} = (0\cdot p_{13} + 0\cdot p_{23} + 1\cdot p_{33}) + f_{21}$$

$$f_{40} = 1\cdot p_{14} + f_{10}p_{24} + f_{20}p_{34} + f_{30}p_{44}$$

$$f_{41} = (0\cdot p_{14} + 1\cdot p_{24} + f_{21}p_{34} + f_{31}p_{44}) + f_{30}$$

$$f_{42} = (0\cdot p_{14} + 0\cdot p_{24} + 1\cdot p_{34} + f_{32}p_{44}) + f_{31}$$

$$f_{43} = (0\cdot p_{14} + 0\cdot p_{24} + 0\cdot p_{34} + 1\cdot p_{44}) + f_{32}$$

以上のようにして, 特性方程式が求められる。そして, この高次方程式を Bairstow の方法によって根を求める。

KDC-1 を用いて固有値問題を解いた例について, 簡単に, 講演当日説明する。