V―14 仮想質量と水中における柱の振動 (II)

早稲田大学　正員　桜井彰雄

1. 水中深く立っている Flexible Pier や取水塔など，柱状構造物の動的挙動を知るために行われた研究である。仮定は従来の動水圧理論と同様であるが，取扱の便利さから水の作用を仮想質量の形に統一して表現した。

2. 質量 M の物体が速度 V で水中を運動する時，水の速度ポテンシャルを $\Phi=\phi(r)\cdot V(t)$ とすれば，物体と水の持つ運動の全エネルギーは，

$$(1)\qquad K=\frac{1}{2}(M+C)V^2 \qquad C=\rho_0\int_S\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}dS\ ,$$

ρ_0 = 水の密度
S = 境界面
ν = 水中より境界に立てた外向き法線

従って，$\partial K/\partial t=(M+C)V\,dV/dt$ であるが，物体に働く外力の合力を F とすれば $\partial K=F\cdot(V\partial t)$ であるから $F=(M+C)dV/dt$ と表わされる。この式は質量 $(M+C)$ を定義するものであって，仮想質量又は附加質量 C が求まれば水中における物体の運動を空中におけると同様に表わすことが出来る。

3. 円柱がたわみ運動する場合を考える。柱の変位，水の速度ポテンシャルを $y(x,t)=f(x)\cdot T(t)$，$\Phi(r,t)=\phi(r)T'(t)$ とおき(1)に代入すれば，

$$(2)\qquad K=\frac{1}{2}\left[\int_0^l\rho A dx\cdot f^2(x)+\rho_0\int_S\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}dS\right]\cdot(T')^2$$

水は非圧縮完全流体であると仮定すれば，$\nabla^2\Phi=0$（連続式）。円柱座標系について級数解を求めれば，

$$(3)\qquad \varphi(r,\theta,x)=\begin{Bmatrix}I_n(mr)\\K_n(mr)\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}\cos mx\\\sin mx\end{Bmatrix}\times\begin{Bmatrix}\cos n\theta\\\sin n\theta\end{Bmatrix}$$

境界条件 (i) $x=0$（水底）で $\partial\Phi/\partial x=0$ (ii) $x=h$（表面）で $p=-\rho_0\partial\Phi/\partial t=-\rho_0\varphi T''=0\ \therefore\ \varphi=0$ (iii) $r\to\infty$ で $\varphi\to 0$ (iv) $r=a$（円柱表面）で $(\partial\Phi/\partial r)_{r=a}=f(x)T'\cos\theta$ で φ を定めると次のようになる。

$$(4)\qquad \varphi(r,\theta,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2h\,K_1(\lambda_n\frac{r}{h})}{\lambda_n K_1'(\lambda_n\frac{a}{h})}\cdot\int_0^1 f(h\xi)\cos\lambda_n\xi\,d\xi\cdot\cos\theta\cdot\cos\lambda_n\frac{x}{h}\qquad \lambda_n=\frac{2n+1}{2}\pi$$

次に具体的な K の値を求める。境界条件(i),(ii),(iii)を考えれば，C の面積分は円柱表面についてのみ行えばよい。ν の向きを考えれば，円柱表面で $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=-f(x)\cos\theta$ であるから，

$$C=\rho_0\int_S\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}dS=-\int_0^{2\pi}a\,d\theta\int_0^h\varphi(a,\theta,x)f(x)\cos\theta\,d\theta$$

$$(5)\qquad =\rho_0\pi a^2\cdot\sum K^{(n)}(a/h)\cdot\int_0^1 f(h\xi)\cos\lambda_n\xi\,d\xi\cdot\int_0^h f(x)\cos\lambda_n\frac{x}{h}$$

$$(6)\qquad =\rho_0\pi a^2 h\cdot\sum K^{(n)}(a/h)\left[\int_0^1 f(h\xi)\cos\lambda_n\xi\,d\xi\right]^2$$

$$\text{但し}\qquad K^{(n)}(a/h)=\frac{2}{a/h}\cdot\frac{K_1(\lambda_n\frac{a}{h})}{\left\{\lambda_n K_0(\lambda_n\frac{a}{h})+\frac{h}{a}\cdot K_1(\lambda_n\frac{a}{h})\right\}}$$

4. エネルギー法により振動率の近似値を求める。 $y = f(x)\sin pt$ とおけば，

(7) $$\frac{1}{p^2} = \frac{K_{max}}{P_{max}} = \frac{\int_0^l \rho A f^2 dx + \rho_0 \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds}{\int_0^l EI\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)^2 dx}$$

柱の質量分布が一様であれば，
$$= \frac{1}{p_0^2}\left[1 + \frac{\rho_0 \pi a^2}{\rho A}\cdot\frac{h}{l}\cdot\sum K^{(n)}\left(\frac{a}{h}\right)\cdot\frac{\left\{\int_0^1 f(h\zeta)\cos\lambda_n \zeta\, d\zeta\right\}^2}{\int_0^1 f(l\zeta)^2 dx}\right]$$

5. 仮想質量分布 $m(x)$ を求める。 (2)式と(5)式から，

(8) $$dK = \frac{1}{2}\left[dm + dc\right] = \frac{dx}{2}\left[\rho A f_{(x)}^2 + \rho_0 \pi a^2 \sum K^{(n)}\left(\tfrac{a}{h}\right)\int_0^1 f(h\zeta)\cos\lambda_n\zeta\, d\zeta \cdot f(x)\cos\lambda_n\frac{x}{h}\right]\cdot(T')^2$$
$$= \frac{dx}{2}\left[\frac{\;\;''\;\;}{f(x)^2}\right]\cdot v^2 \qquad (\because\ v = f(x)\cdot T')$$

従って，(9) $$m(x) = \frac{1}{f(x)}\cdot\rho_0\pi a^2\sum K^{(n)}\left(\tfrac{a}{h}\right)\int_0^1 f(h\zeta)\cos\lambda_n\zeta\, d\zeta\cdot\cos\lambda_n\frac{x}{h}$$

水中に立てられた柱の振動方程式は， $y = f(x)\cdot T(t)$ として，
$$EI\cdot y_{xxxx} + \left[A\rho + m(x)\right]y_{tt} + \eta\cdot y_{xxxxt} = 0$$
$$\therefore \begin{cases} T'' + 2\varepsilon_0 T' + n_0^2 T = 0 \\ f^{(4)} + \left(\frac{m}{h}\right)^4 f = \sum R_n \cos\lambda_n\frac{x}{h} \end{cases} \quad 但し，\begin{cases} \varepsilon_0 = \frac{1}{2}\eta/_{A\rho}\cdot\left(\frac{m}{h}\right)^4, \quad n_0^2 = \frac{EI}{A\rho}\left(\frac{m}{h}\right)^4 \\ R_n = \frac{\pi a^2\rho_0}{A\rho}\cdot\left(\frac{m}{h}\right)^4\cdot K^{(n)}\left(\tfrac{a}{h}\right)\cdot\int_0^1 f(h\zeta)\cos\lambda_n\zeta\, d\zeta \end{cases}$$

Tの解は成書に与えられているから，fについてのみ解を示せば，

(10) $$f(x) = A\cdot\cos m\frac{x}{h} + B\cdot\sin m\frac{x}{h} + C\cosh m\frac{x}{h} + D\cdot\sinh m\frac{x}{h}$$
$$+ \sum F_n\left[AI_n^{(1)} + BI_n^{(2)} + CI_n^{(3)} + DI_n^{(4)}\right]\cos\lambda_n\frac{x}{h}$$

但し
$$\begin{cases} F_n = \frac{E_n}{1-\frac{E_n}{2}}, \quad E_n = \frac{\pi a^2\rho_0}{A\rho}\cdot\frac{m^4}{\lambda_n^4 - m^4}\cdot K^{(n)}\left(\tfrac{a}{h}\right), \quad \lambda_n = \frac{2n+1}{2}\pi \\ I_n^{(1)} = \frac{1}{\lambda_n^2 - m^2}\left[(-1)^n\lambda_n\cos m\right], \quad I_n^{(2)} = \frac{1}{\lambda_n^2 - m^2}\left[(-1)^n\lambda_n\sin m - m\right] \\ I_n^{(3)} = \frac{1}{\lambda_n^2 + m^2}\left[(-1)^n\lambda_n\cosh m\right], \quad I_n^{(4)} = \frac{1}{\lambda_n^2 + m^2}\left[(-1)^n\lambda_n\sinh m - m\right] \end{cases}$$

6. 数値計算例 $a/h = 0.06$， $y = a_0\left(1 - \cos\frac{\pi}{2h}x\right)$ と仮定して(7)に代入すると，片持ばりの振動率は $1/p^2 = 1/p_0^2\cdot\left[1 + 0.7246\cdot h/l\cdot\rho_0\pi a^2/\rho A\right]$ となる。 $h = l$， $\rho_0\pi a^2/A\rho = 0.2$ とすると $1/p = 1.070\cdot 1/p_0$， $p = 0.935\cdot p_0$ で，このpより計算すると， $m = 1.813$ である。同じ場合について，逐次近似法で(10)式より m を求めると， $m_0 = 1.875$， $m_1 = 1.806$ $m_2 = 1.812$，…… となる。

7. 円柱がたわまぬ時の $m(x)$ は(9)式に $f = \mathrm{Const.}$ を代入すればよい。この場合の全仮想質量は $M = \rho_0\pi a^2 h\sum\frac{1}{\lambda_n^2}\cdot K^{(n)} \fallingdotseq \rho_0\pi a^2 h\cdot\frac{0.97}{1+a/h} \fallingdotseq \rho_0\pi a^2 h\cdot\frac{1}{1+a/h}$ である。 $m(x)$ は近似的に， $m_a(x) = \rho_0\pi a^2\cdot\psi\left(\tfrac{a}{h}\right)\cdot\left(1 - x/h\right)^{a/h}$ と表わされ， これより求められる全仮想質量は $M_a = \rho_0\pi a^2 h \times\psi\left(\tfrac{a}{h}\right)\cdot\frac{1}{1+a/h}$ となるから

(11) $$m(x) = \rho_0\pi a^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)^{\frac{a}{h}}$$

8. 実験によれば，[註)] 角柱に対し 振動方向直角な面の巾を $2a$ とするとき，上式の $\rho_0\pi a^2$ を $4a^2\rho_0$ におきかえればよいことが分かっている。

本研究は，文部省昭和35年度科学研究費の交附を受けて行われたものである。

註) 桜井彰雄「仮想質量と柱の振動」 35年度土木学会講演会 III－29