V—11 多スパン桁の振動

早大土木 正員 平嶋政治

実際橋梁においては桁の断面は順次変化するが，設計の第一段階におけるスパン割の決定には，まず等断面として固有振動数を算定しその動的特性の概要を把握し次いで設計断面による精密計算を行なうわけであるから等断面を有する多スパン桁（ゲルバー桁，連續桁等）の固有振動数を迅速に知る方法を述べ，次ぎに一般多スパン桁（断面変化をする場合等を含む）の固有振動数を求める漸化式について述べる。

一般に，多スパン桁の端末は支持点であり，中間点はヒンジ点又は支持点である。従って端末スパンは，支持—支持 又は ヒンジ—支持 であり，中間スパンは，支持—ヒンジ，ヒンジ—支持，ヒンジ—ヒンジ 又は 支持—支持 である。そこで，等断面多スパン桁の固有振動数を求めるには，これらの関係を接続條件に従って順次算定して行けばよいわけである。さて，行列式を整理すると 次のようになる。

端末スパン：

$$2F_{s'} = -\frac{Ch_{s+1'}\,S_{s+1'} - Sh_{s+1'}\,C_{s+1'}}{Sh_{s+1'}\cdot S_{s+1'}}$$

中間スパン：

$$\left\{\begin{array}{l}\text{支持—ヒンジ}\\\text{ヒンジ—支持}\end{array}\right. \quad 2F_{s-1'} = \frac{2(Ch_{s'}C_{s'}+1) + (Ch_{s'}S_{s'} - Sh_{s'}C_{s'})\cdot 2F_{s'}}{(Ch_{s'}S_{s'} - Sh_{s'}C_{s'}) - Sh_{s'}S_{s'}\cdot 2F_{s'}}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ヒンジ—ヒンジ}\\\text{支持—支持}\end{array}\right. \quad 2F_{s-1'} = \frac{2(Ch_{s'}C_{s'}-1) + (Ch_{s'}S_{s'} - Sh_{s'}C_{s'})\cdot 2F_{s'}}{(Ch_{s'}S_{s'} - Sh_{s'}C_{s'}) - Sh_{s'}S_{s'}\cdot 2F_{s'}}$$

上記の漸化式により，容易に固有値を知ることができる。
なお，上式の算定に便利な，数表および圖表は，早稲田大学理工学研究所報告（NO. 15.）に載せてある。

次ぎに，桁の断面が変化する場合のうち，特に階段的に変化するときの漸化式を示す。

対稱型振動： $Ch_1S_1\cdot F_1 + Sh_1C_1\cdot F_2 + Ch_1C_1\cdot F_3 + Sh_1S_1\cdot F_4 = 0$

斜対稱型振動： $Sh_1C_1\cdot F_1 + Ch_1S_1\cdot F_2 + Sh_1S_1\cdot F_3 + Ch_1C_1\cdot F_4 = 0$

$$F_1 = (-\alpha_1+\alpha_3)(1+\alpha_2)\vartheta_1 - 2(1+\alpha_2)\alpha_3\vartheta_3 + 2(-\alpha_1+\alpha_3)\alpha_2\vartheta_4 + 4\alpha_2\alpha_3\vartheta_6$$

$$F_2 = (\alpha_1+\alpha_3)(-1+\alpha_2)\vartheta_1 + 2(1-\alpha_2)\alpha_3\vartheta_3 + 2(\alpha_1+\alpha_3)\alpha_2\vartheta_4 + 4\alpha_2\alpha_3\vartheta_6$$

$$F_3 = 4\alpha_2\vartheta_2$$

$$F_4 = -4\alpha_1\alpha_3\vartheta_5$$

$$\alpha_1 = k_1/k_2 \qquad \alpha_2 = (E_1I_1/E_2I_2)(k_1/k_2)^2 \qquad \alpha_3 = (E_1I_1/E_2I_2)(k_1/k_2)^3$$

$$k_i = (p^2 A_i \gamma_i / E_i I_i)^{\frac{1}{4}}$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_{5+7.\,6+8} \qquad \vartheta_2 = \vartheta_{5+7.\,7} \qquad \vartheta_3 = \vartheta_{5+7.\,8}$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_{6+8.\,7} \qquad \vartheta_5 = \vartheta_{6+8.\,8} \qquad \vartheta_6 = \vartheta_{7.\,8}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_{ij} = {} & \varphi_{ij}\{(G+I)(H+J)\}\,\varphi_{9+11\ \ 10+12}(KL) \\
& -2\varphi_{ij}\{(G+I)\cdot I\}\,\varphi_{9+11\ \ 11}(KL) \\
& -2\varphi_{ij}\{(G+I)\cdot J\}\,\varphi_{9+11\ \ 12}(KL) \\
& -2\varphi_{ij}\{(H+J)\cdot I\}\,\varphi_{10+12\ \ 11}(KL) \\
& -2\varphi_{ij}\{(H+J)\cdot J\}\,\varphi_{10+12\ \ 12}(KL) \\
& -2\varphi_{ij}\{I\cdot J\}\,\varphi_{11\ \ 12}(KL)
\end{aligned}$$

接続点が支持点である場合

$$\vartheta_{ij} = 2\varphi_{ij}(GH)\varphi_{10.\,12-10}(KL) - \varphi_{ij}(GI)\varphi_{11-9\ 12-10}(KL)$$

接続点がヒンジである場合

$$\vartheta_{ij} = \varphi_{ij}(GH)\varphi_{11+9.\,12+10}(KL) + 2\varphi_{ij}(GI)\varphi_{10.\,12+10}(KL)$$

これらの式を順次適用して，一般多スパン桁の固有値を漸化的に求めることができる。