

V-9 粘土地山中の円形トンネル周辺の弾塑性問題について

正員 徳島大学工学部 小田 英一

地表面よりかなり深い地山の地質が粘土のように内部摩擦角が零であり、粘着のみを有しているようなものであるとする。このような地山に初期応力として鉛直方向の圧力と水平方向の圧力が作用していてこの値が異なるとき、この二方向の圧力の大小及びこの地山に円形トンネルを掘削して支保工で支えるときの支保工の剛性に依りて生ずる支保工土圧の大小とのある関係によつて、トンネル周辺近傍が塑性状態となり、その外周に弾性状態の領域が生ずることがある。このような問題を取扱うのを弾塑性問題と称し、トンネル周辺全域に塑性領域が生じ、弾性領域と塑性領域との境界（弾塑性境界と称することとする）がトンネルを包囲する場合の条件、及び塑性領域と弾性領域との応力分布及び弾塑性境界における両域の応力のつながりの関係について考察することとする。

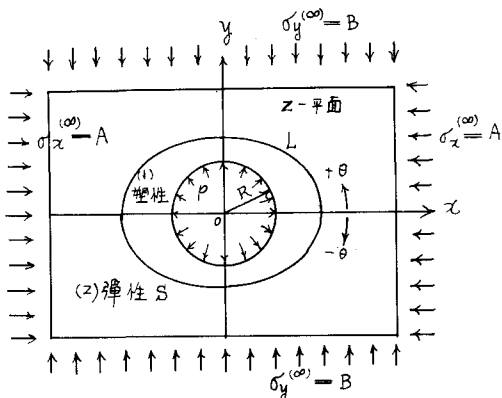


図-1

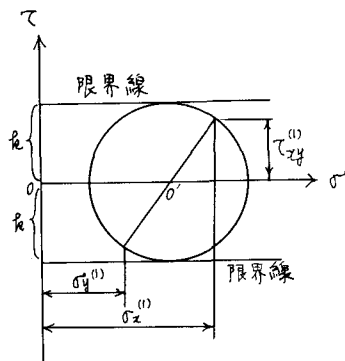


図-2

図-1に示すように無限平面に半径Rなるトンネル円孔が掘削され、支保工の支える土圧pが作用している。トンネル中心Oを通り水平座標軸をx、鉛直座標軸をyとする。地山荷重としては鉛直方向にB、水平方向にAなる初期応力が作用しているとし、地山の粘着力をcとする。x、y軸と直交する方向には歪み生じないものとする。いまトンネル周辺近くは塑性状態となり、その外方に弾性領域があり、塑性領域と弾性領域の境界Lがトンネル円孔を包囲するとする。塑性領域中のx、y座標をとったときのx方向、y方向の直応力をそれぞれ $\sigma_x^{(1)}$ 、 $\sigma_y^{(1)}$ とし、せん断応力を $\tau_{xy}^{(1)}$ とする。図-2に示すように塑性領域においてはモールの応力円が σ 軸に平行な限界線と切ずる。すなわち降伏条件式が成立する。また塑性領域の応力成分で極座標 r 、 θ をとったときのr方向、 θ 方向の直応力をそれぞれ $\sigma_r^{(1)}$ 、 $\sigma_\theta^{(1)}$ とし、せん断応力を $\tau_{r\theta}^{(1)}$ とする。弾塑性境界LはL. A. Galinによつて楕円なることが証明されているから、弾性領域ではz-平面の単位円の外にZ-平面のLの外方を写像する。 $z = \rho e^{i\theta}$ とし、 ρ 、 θ はz-平面での極座標である。弾性領域の写像函数は次式となる。

$$z = x + iy = w(\zeta) = c \left(\zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ただし } c = R \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left(\frac{B+A}{2} - p - k \right) \right\}, \quad \beta = \frac{B-A}{2k} \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。弾塑性境界は上式において $\beta = 1$ としたとき、(1)式によって求められる。弾性領域の z 面での (ρ, θ) 点に作用する応力成分で ρ, θ 軸に対する直応力をそれぞれ $\sigma_\theta^{(2)}, \sigma_\rho^{(2)}$ とし、せん断応力を $\tau_{\rho\theta}^{(2)}$ とする。しかるに塑性領域、弾性領域の応力成分は次式となる。

$$\sigma_r^{(1)} = 2k \log \frac{r}{R} + p, \quad \sigma_\theta^{(1)} = 2k \log \frac{r}{R} + 2k + p, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\sigma_\theta^{(2)} = 2k \log c - 2k \log R + (k+p) - 2k \log \rho + k \log \left\{ \left(\rho^2 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) + 2\beta \cos 2\theta \right\} \\ + k \left[\frac{(\rho^4 - \beta^4) - 4\rho^2\beta^2 \sin^2 2\theta}{(\rho^4 - \beta^4) + 4\rho^2\beta^2 \sin^2 2\theta} - \frac{\rho^4 - \beta^4}{\rho^4 + \beta^4 - 2\rho^2\beta^2 \cos 2\theta} + \frac{\rho^4 - \beta^4 + \beta^2 \rho^2 \cos 2\theta - \beta \cos 2\theta}{\rho^4 + \beta^4 - 2\rho^2\beta^2 \cos 2\theta} \right] \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_\rho^{(2)} = 2k \log c - 2k \log R + (k+p) - 2k \log \rho + k \log \left\{ \left(\rho^2 + \frac{\beta^2}{\rho^2} \right) + 2\beta \cos 2\theta \right\} \\ - k \left[\frac{(\rho^4 - \beta^4) - 4\rho^2\beta^2 \sin^2 2\theta}{(\rho^4 - \beta^4) + 4\rho^2\beta^2 \sin^2 2\theta} - \frac{\rho^4 - \beta^4}{\rho^4 + \beta^4 - 2\rho^2\beta^2 \cos 2\theta} + \frac{\rho^4 - \beta^4 + \beta^2 \rho^2 \cos 2\theta - \beta \cos 2\theta}{\rho^4 + \beta^4 - 2\rho^2\beta^2 \cos 2\theta} \right] \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\tau_{\rho\theta}^{(2)} = k \left[\frac{4(\rho^4 - \beta^4)\rho^2\beta \sin 2\theta}{(\rho^4 - \beta^4) + 4\rho^2\beta^2 \sin^2 2\theta} - \frac{2\rho^2\beta \sin 2\theta}{\rho^4 + \beta^4 - 2\rho^2\beta^2 \cos 2\theta} + \frac{\beta \rho^4 \sin 2\theta + \beta \sin 2\theta}{\rho^4 + \beta^4 - 2\rho^2\beta^2 \cos 2\theta} \right] \quad \dots\dots\dots (6)$$

弾性領域における点の座標は $x = c(\rho + \frac{\beta}{\rho}) \cos \theta$, $y = c(\rho - \frac{\beta}{\rho}) \sin \theta$ によって求められる。また弾塑性境界がトンネル内孔を取り囲む条件は

$$|B-A| \leq 2k \left[1 - \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left(p + k - \frac{B+A}{2} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。

計算例として $R = 3^m$, $k = 3 \text{ kg/cm}^2$, $B = 10 \text{ kg/cm}^2$, $A = 7.5 \text{ kg/cm}^2$ とするとき、 $p = 0, 1, 2 \text{ kg/cm}^2$ に対して z 軸上の塑性領域及び弾性領域における応力分布を求めたものが図-3に示すものである。

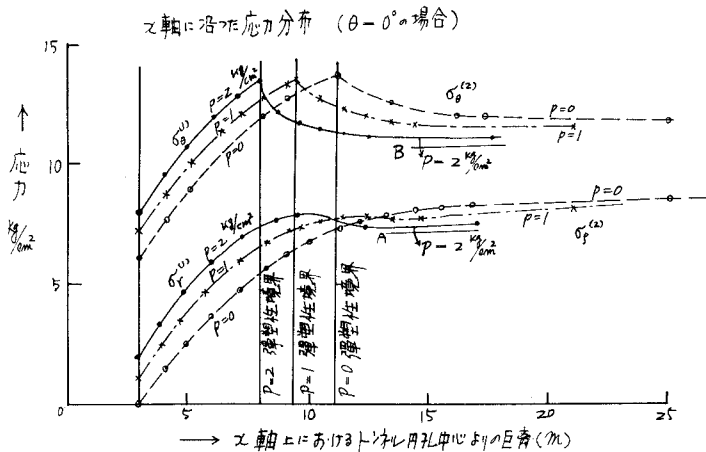


図 - 3