V—6 座標の変換と構造力学について

日新調査設計事務所　　正員　石川時信

要旨　複雑なる構造力学上の現象を単一座標 x y をもって表現するのは根本的に無理がある。ただ連立方程式の概念でいえば理論上は可能であるがその代数式の冗長さからいって実用上は無價値に等しい。それでそれらの現象に適当な座標を与えて表現を簡單にし計算を容易にせんとするのが本文である。

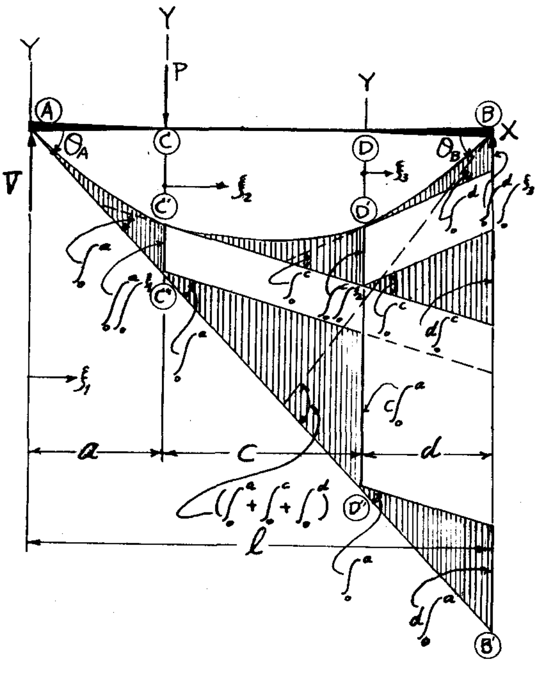
記述は最初に幾何学的直觀によりてその眞なることを示し次に代数計算式を以て実用上の式を述べることとしてある。

概説　図のように單純梁ABが三つの急変断面から成り立っているものとし梁の両端と断面の急変点C, Dとの4点において彈性曲線への切線を引けば左より第1切線と第2切線とのなす角、第2切線と第3切線とのなす角、第3切線と第4切線とのなす角の和は第1切線と第4切線とのなす角に等しい。しかしてその角はまた梁の両端のタワミ角 θ_A と θ_B との和に等しい。各区分の両端における切線相互間のなす角はモールの法則によりて明らかであるがそれらを積分記号で表わせば、$\int_0^a \frac{M}{EI} d\xi_1$, $\int_0^c \frac{M}{EI} d\xi_2$, $\int_0^d \frac{M}{EI} d\xi_3$

となり次の二つの式が成立する。$\frac{M}{EI} d\xi$ を省略。

$$\int_0^a + \int_0^c + \int_0^d = \theta_A + \theta_B \quad \cdots\cdots (1)$$

$$d\int_0^a + c\int_0^a + \int_0^a\int_0^{\xi_1} + d\int_0^c + \int_0^c\int_0^{\xi_2} + \int_0^d\int_0^{\xi_3} = l\theta_A \quad \cdots (2)$$



この両式は梁ABの両端には曲げの働かない場合であるがもし曲げが働けばタワミ角 θ_A, θ_B, 曲げ M との間の相互関係が量的に替わり両式は成立する。また梁ABの両端に変位があってもその変位 d_A, d_B は單に式(2)に添加されるのみである。ただし、その場合もまた θ_A, θ_B, M 相互間の量的関係が替ることは勿論である。

仮称新座標　上記のことは梁の三つの部分にそれぞれ $\xi_1 y$ 座標, $\xi_2 y$ 座標, $\xi_3 y$ 座標を与えたことに相当するが横軸に相当する第一切線、第二切線、第三切線第四切線相互間のなす角も極めて小さく、また第一切線が水平線となす角も極めて小さいという前提がある。幾何的に直觀によりて仮稱新座標を認識するためには、それらの角を充分大きく書く必要がある。しかして、それら新座標は、縦軸はただ平行移動をしただけであり、横軸は次々に振れ角に相当する量だけ廻轉するのであるから、これに命名するとしたら廻転という字を付した方が妥当のようである。直角座標の変換ということになると、平行移動が普通なる故、極座標の変換ということになると、ある角度だけ廻転する

こと意味するよう命名すべきであろう。すなわち，図面においては新座標の横軸は相当量の廻轉をしてあるように見えるから，それら新座標を廻轉座標と称すれば新座標上の梁の振れ角$\int_0^a \frac{M}{EI} d\xi_1$，$\int_0^c \frac{M}{EI} d\xi_2$，$\int_0^d \frac{M}{EI} d\xi_3$，および振れ$\int_0^a \int_0^{\xi_1} \frac{M}{EI} d\xi_1 d\xi_1$，$\int_0^c \int_0^{\xi_2} \frac{M}{EI} d\xi_2 d\xi_2$，$\int_0^d \int_0^{\xi_3} \frac{M}{EI} d\xi_3 d\xi_3$も図面上に表われ，理解の助けとなることが極めて大であろう。

タワミと振れについて

図上にても明かなように振れ角と振れは新座標上の量にして，タワミ角θ_A，θ_Bは$l\theta_A$と共に梁の原位置線ABを基線とする量であることがわかる。すなわち，タワミは両座標上の量の差である。

応用上の説明

式(1)，(2)の積分記号内のMの式は梁の才一区間，才二区間，才三区間においてはそれぞれ$M = M_A + V\xi_1$，$M = M_A + V(a+\xi_2) - P\xi_2$，$M = M_A + V(a+c+\xi_3) - P(c+\xi_3)$となり，Iは$e^{-m\xi}$[1]，$(1 \pm c\xi)^2$，$(1 \pm c\xi)^3$[2]等適当に定める。また荷重が断面の変化点にない一般の場合は副座標[1]の場合による。しかして静力的條件式$\Sigma M = 0$より，$M_A + Vl - P(c+d) + M_B = 0$がえら，$V$は消去せらる。その結果は，

$$M_A = \frac{E}{A_0}\left[(b_1 l - b_2)\theta_A + b_2\theta_B - b_1 d\right] - C_{AB} \quad \cdots (3),$$

$$M_B = \frac{E}{A_0}\left[(a_2 l - b_2)\theta_B + \{(a_1 l - b_1) - (a_2 - b_2)\}\theta_A - (a_1 l - b_1) d\right] + C_{BA} \quad \cdots\cdots (4),$$

ただし，式(3)，(4)においてa_1，b_1，a_2，b_2，A_0，C_{AB}，C_{BA}等は断面の変化に応じてそれぞれの値をとり，[3),4),5)] その実用表もある。一例でいえば，$I = e^{\pm mx}$の場合は，考えられたる梁の両端のIの比が，$Z^3 = 8$の場合では，$M_A = \frac{EI}{0.02478l}[0.2125\theta_A + 0.1427\theta_B - 0.3552R] - 0.184Pl \quad \cdots\cdots (5)$，$M_B = \frac{EI}{0.02478l}[0.2125\theta_B + 0.1427\theta_A - 0.3552R] + 0.0398Pl \quad \cdots\cdots (6)$。また梁の全長に亙りてIが一様の場合は，$M_A = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B - 3R) - \frac{9}{64}Pl$，$M_B = \frac{2EI}{l}[2\theta_B + \theta_A - 3R] + \frac{3}{64}Pl$。

結論　以上複雑なる構造力学上の現象を先づ構造物の構成要素である處の梁の問題から始めて，梁の両端の特殊性に及び，その抵抗性を利用する方法を述べたが，要旨とする処は，幾何学的にその要とする処を直観によりて知り，次に代数計算に訴えることとしたまでである。

代数計算に於いては，多年習熟された正員の規約に従ったことは勿論である。また実用上必要なる代表的数値表も既に作製発表済みであることを述べた。また構造物設計上必要の多い連立方程式を解く方法は本邦独特の発達において鷹部屋博士[6]一派の優れたる方法があるを以って，その基本形を遵倖する形にしておいた。

かくすることによって，始めて，信頼のおける安全率を以て構造物の合理的かつ，經済的設計を平易迅速にすることが出来るであろう。

参　考　文　献

1)　石川時信　：副座標によるBeam Theoryについて．土木学会論文集才38号　1956.

2)　TADASHI MURAKAMI：Studies on the Slope-Deflection Method. Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University Vol. 11, No. 1　1953.

3)　石川時信　：急変断面部材の基本的代数式．日本建築学会関東支部才28回学術研究発表会　1960.

4)　石川時信　：構造力学と複座標について．日本建築学会論文報告集第66号．1960.

5)　石川時信　：複座標によるBeam Theoryについて．第10回応用力学連合講演会 1960.

6)　鷹部屋福平　：撓角理論とその応用．昭和29年.