V－3　定常状態のレスポンスから単純梁の過渡現象を求める方法について

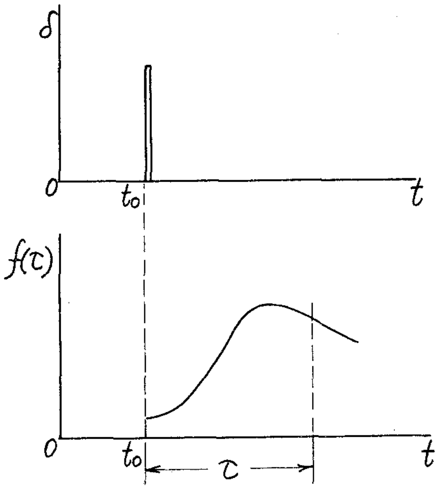
熊本大学　正員　平井一男

まえがき

減衰を考慮に入れた複雑な構造物に任意の力が作用する場合，その振動系の過渡現象を求めることは非常に困難であり，一般には簡単に解析できない。しかしながら過渡現象の解析は困難であっても，強制週期力を作用させた場合の定常状態の解析は比較的簡単に行なえる場合が多い。このような定常状態のレスポンスが求められたならば，このレスポンスをもとにして過渡現象の近似解を求めることが可能となる。この解析法は構造物の種類にかかわりなく適用できるものであって，その利用範囲は非常に大きいと考えられるが，この方法の適用には一つの制限がある。それは減衰の小さい構造物，云いかえると，共振時においてその振巾が非常に大きくなるような構造物に，この解析法を適用する場合には計算途中で大きい誤差が予想されるような過程があることである。

道路橋のようにコンクリート合成を行なった橋梁では，かなり減衰が大きいので，この方法を適用しても問題ないように思われるが，スパンの大きい鉄道橋の場合には減衰が小さく，このために計算精度が著しく落ちることが考えられる。ここでは，この解析法によれば，減衰の小さい構造物に対してどの程度の精度をもって計算できるかを調べるためにInglisが彼の著書"A Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges"において取り扱っているNewark Dyke 橋（スパン80m）を例にとって数値計算を行なった。

解析



一般にある振動系にディラックの衝撃函数δで示されるようなPulse荷重がt_0の時刻に作用する場合，τ時間後のレスポンス$f(\tau)$は，式(1)にて示される。$f(\tau)$は余効函数，または重み函数とも呼ばれる。

$$f(\tau)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty A_1(\omega)\cos\omega\tau\,d\omega \qquad (1)$$

ここに$A_1(\omega)$は角速度ωの強制週期力$P=P_0\sin\omega t$を作用させた場合，式(2)で示すようにその振動系の振巾A，位相差φにより決定される函数である。

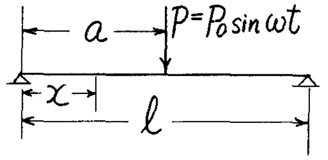
$$A_1(\omega)=A\cos\varphi \qquad (2)$$

したがって角速度ωの値を0より∞迄変化させた場合の振巾，位相差が計算できれば$f(\tau)$は決定できることになる。

梁の減衰を伴なう曲げ振動の微分方程式は式(3)にて示される。

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\pi\delta m\frac{dy}{dt} = w \qquad (3)$$

右図に示すような単純梁に強制週期力 $P=P_0\sin\omega t$ が作用する場合には，任意の点 x の変位 y は式(4) にて示される。



$$y=\frac{2l^3P_0}{EI\pi^4}\left[\frac{1}{1^4}\beta_1\sin\frac{\pi a}{l}\sin\frac{\pi x}{l}\sin(\omega t-\varphi_1)+\frac{1}{2^4}\beta_2\sin\frac{2\pi a}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3^4}\beta_3\sin\frac{3\pi a}{l}\sin\frac{3\pi x}{l}\sin(\omega t-\varphi_3)+\cdots\cdots\right] \qquad (4)$$

ここに

$$\beta_k=1\Big/\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2+\left(2\frac{\varepsilon}{\omega_k}\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},\quad \tan\varphi_k=2\frac{\varepsilon}{\omega_k}\frac{\omega}{\omega_k}\Big/\left\{1-\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right)^2\right\},\quad \omega_k=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad (5)$$

したがって，式(5)で示される振巾，位相差を求めれば式(1)により $f(\tau)$ が決定できる。
Newark Dyke 橋の場合には諸数値は下に示すようになる。

$EI=8.202\times10^7\ (t\cdot m^2)$ ，$m=5.957\times10^{-1}\ (t\,sec^2/m^2)$，$\delta=4.240\times10^{-2}(sec^{-1})$

結論

ここに例として取り上げた Newark Dyke 橋はかなり減衰が小さい橋であり，共振時における振巾が static 荷重のときと比べてかなり大きくなる。この結果 $A_1(\omega)$ の区分求積にさいして共振点附近にては実際の曲線とかなり異なった折線近似となる。しかし，この $A_1(\omega)$ より求めた $f(\tau)$ の函数はかなり精度よく求めることができた。すなわち週期は測定値 0.347 sec に対し，計算値は 0.348 sec であり，減衰比は測定値 0.91 に対して，計算値は 0.89 である。

ここで例として取り扱った Newark Dyke 橋のような減衰の小さい橋に対して，上にのべたような精度で計算を行うことができたので，減衰の小さい構造物に対してはさらによい精度が期待できると考えられる。

文献

1) James J. Donegan and Carl R. Huss : Comparison of Several Methods for Obtaining the Time Response of Linear Systems to Either a Unit Impulse or Arbitrary Input from Frequency Response Data. N.A.C.A. Tech. Note 3701, 1956

2) Carl R. Huss and James J. Donegan : Method and Tables for Determining the Time Response to a Unit Impulse from Frequency Response Data and for Determining the Fourier Transform of a Function of Time, N.A.C.A. Tech. Note. 3598

3) C. T. G. Looney ; Steady-State Forced Vibration of Continuous Frames. Proc. A.S.C.E. June 1952