V－2　梁およびラーメンの新しい解析法（相反作用法，撓み法）

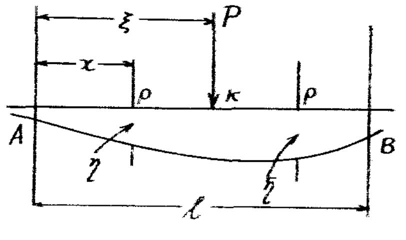
信州大学工学部　正員　谷本勉之助

梁やラーメンの解析を行うのに，古来いろいろの方法が与えられていて，たとえばカスチリアノの定理を使う方法，クラペイロンの3連モーメント法，マクスエルの相反定理による方法などがある．これらはすべて撓みの方程式 $d^2\eta/dx^2 = -M/EI$ に結びついている．したがって"2階微分係数法"または"曲げモーメント法"と総称してよいであろう．ずっと降って $d\eta/dx = \theta$ を基にする方法が考案せられ，"撓角法"と呼ばれている．

ここに示すのは，η そのものを基にする方法である．よって"撓み法"と名付けてよい．この方法によると，その基本理論が一本筋で誰にもわかりやすく，その上に計算手間が大へん少なくてすむ．計算にはごく初等のマトリクスを使うのが便利である．

1.　集中荷重のとき（図－1）．一般に撓み η は

$$\eta = K[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]\mathbf{N}(1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3), \qquad (1)$$



図－1

ただし，かっこ（　）は列ベクトルを表わし，

$$K = Pl^3/6EI, \quad \rho = x/l, \quad \kappa = \xi/l;$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

撓み角，曲げモーメント，せん断力はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{d\eta}{dx} = \frac{Pl^2}{6EI}[0\ \ 1\ \ 2\rho\ \ 3\rho^2]\mathbf{N}(1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3), \\ M &= -EI\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{Pl}{3}[0\ \ 0\ \ 1\ \ 3\rho\,]\mathbf{N}(1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3), \\ S &= \frac{dM}{dx} = -P[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]\mathbf{N}(1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

両端 A，B（図－1）の支持条件には触れずに，荷重 P が作用している条件：

$$(\eta)_{\rho=\kappa} = (\bar{\eta})_{\rho=\kappa}, \quad \left(\frac{d\eta}{d\rho}\right)_{\rho=\kappa} = \left(\frac{d\bar{\eta}}{d\rho}\right)_{\rho=\kappa}, \quad \left(\frac{d^2\eta}{d\rho^2}\right)_{\rho=\kappa} = \left(\frac{d^2\bar{\eta}}{d\rho^2}\right)_{\rho=\kappa}, \quad -\frac{EI}{l^3}\left\{\left(\frac{d^3\eta}{d\rho^3}\right)_{\rho=\kappa} - \left(\frac{d^3\bar{\eta}}{d\rho^3}\right)_{\rho=\kappa}\right\} = P$$

だけを考えに入れると

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_2+3 & c_2 & c_3 \\ a_3-1 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \quad (0<\rho<\kappa), \qquad \bar{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3-1 \\ a_1 & b_1 & b_2+3 & b_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & c_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \quad (\kappa<\rho<1). \qquad (3)$$

よってマトリクス $\mathbf{N}$ を解であるということができる．

たとえば両端固定の梁では

$$\eta_A=(\eta)_{\rho=0}=0,\quad \left(\frac{d\eta}{d\rho}\right)_A=\left(\frac{d\eta}{d\rho}\right)_{\rho=0}=0,\quad \bar{\eta}_B=(\bar{\eta})_{\rho=1}=0,\quad \left(\frac{d\bar{\eta}}{d\rho}\right)_{\rho=1}=0$$

により

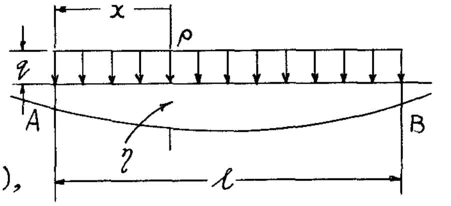
$$\mathbb{N}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&3&-6&3\\-1&0&3&-2\end{bmatrix}.$$

連続梁についても同様に扱うことができる（詳細は別紙に与える）。

2. 分布荷重のとき（図−2）：一様分布荷重のときには

$$\eta=K[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\ \rho^4]\mathbb{N},\qquad (4)$$

ただし　$K=q\ell^4/24EI,\qquad \mathbb{N}=(a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4).$



図−2

荷重のある径間については　$\mathbb{N}=(a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ 1),$

荷重のない径間については　$\mathbb{N}=(a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ 0).$

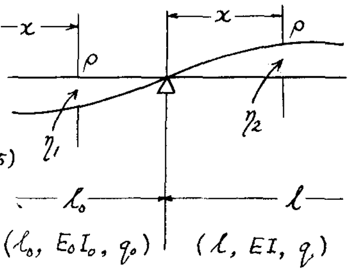
やはり $\mathbb{N}$ を解であるといってよい。a_i は梁の両端の支持条件または連続の条件から定まる。連続梁のときの連続条件は（図−3）

$$\left(\frac{d\eta_1}{dx}\right)_{x=\ell_0}=\left(\frac{d\eta_2}{dx}\right)_{x=0},\qquad E_0I_0\left(\frac{d^2\eta_1}{dx^2}\right)_{x=\ell_0}=EI\left(\frac{d^2\eta_2}{dx^2}\right)_{x=0},$$

すなわち

$$\begin{bmatrix}[0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4] & \alpha^3\beta\gamma\,[0\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]\\ [0\ \ 0\ \ 1\ \ 3\ \ 6] & \alpha^2\gamma\,[0\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{N}_1\\ \mathbb{N}_2\end{bmatrix}=0,\quad (5)$$

ただし　$\alpha=\dfrac{\ell}{\ell_0},\qquad \beta=\dfrac{E_0I_0}{EI},\qquad \gamma=\dfrac{q_0}{q}.$



図−3

このときの両径間の撓み $\eta_1,\ \eta_2$ は

$$\eta_1=\frac{q_0\ell_0^4}{24E_0I_0}[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\ \rho^4]\mathbb{N}_1,\qquad \eta_2=\frac{q\ell^4}{24EI}[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\ \rho^4]\mathbb{N}_2.$$

多径間の連続梁は，式 (5) を使って組織的な計算順によってたやすく解析せられる。

n 次の分布荷重：

$$p=q(c_0+c_1\rho+c_2\rho^2+\cdots+c_n\rho^n)$$

のときにも，同じようにして解析せられる。したがって変断面の梁の解も解析的にえられる。ラーメンについても同様に理論展開せられる。