

V-1 節付き円筒体の自由横振動について

名古屋工業大学 正会員 荒井利一郎

要旨:— この小文の目的は、図-1のような1~3層の1端自由他端固定なる節付き円筒体につき、自由横振動に関する計算を行った結果を報告する事である。

[I]仮定:— (1)質量 M はすべて節円板周辺にそうて $M/2\pi a$ なる割合で等分布し、自由端より順に M_a, M_b, M_c 等の大きさを有するものと仮定した。なお計算結果の数字を算出するに当ってはさらに自由端の M_a は節円板自身の重さと長さ a なる範囲の円筒部の重さとの和に比例するものと仮定し; M_b, M_c 等は節円板自身の重さと長さ $2a$ なる範囲の円筒部の重さとの和に比例するものと仮定した。

(2)各節円板周囲での振動変位は u, v 及び w でこれを表わし、これらは各節の周囲に生じた図-2のような撓乱(外カ)で表わされ得るものと仮定し、 u, v 及び w の方向はそれぞれ φ, θ 及び ψ と同じものを以て正とした。

[II]計算の方法:— こゝで計算にはマトリックス演算を用いた^①ので、いま例を2層の場合にとって大要を記るせば次ぎの通りである。先づ振動変位はいちおう次式(1)のように表わされ得る。

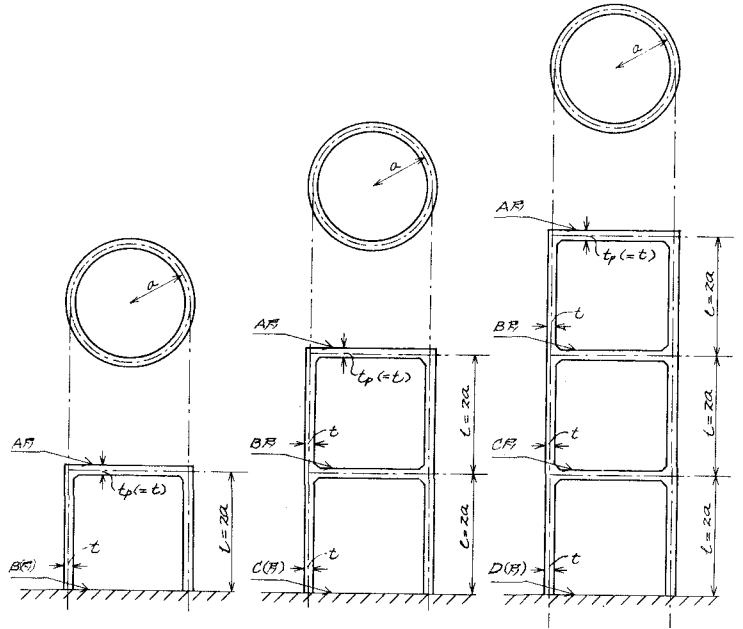


図-1. 1~3層節付き円筒体

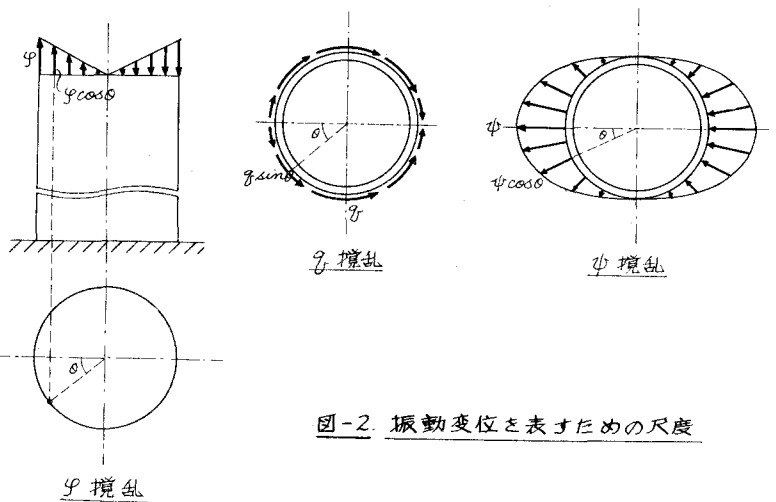


図-2. 振動変位を表すための尺度

A 節円板周囲の変位:

$$\begin{Bmatrix} u_a/\cos\theta \\ v_a/\sin\theta \\ w_a/\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{a1} & U_{a2} & U_{a3} & U_{a4} & U_{a5} & U_{a6} \\ V_{a1} & V_{a2} & V_{a3} & V_{a4} & V_{a5} & V_{a6} \\ W_{a1} & W_{a2} & W_{a3} & W_{a4} & W_{a5} & W_{a6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_a \\ \varrho_a \\ \psi_a \\ \varphi_b \\ \varrho_b \\ \psi_b \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (1, a)$$

B 節円板周囲の変位:

式(1,a)の左右両辺の接尾字 a を悉く b に変えた式 $\dots\dots\dots (1, b)$

たゞし式中、接尾字 1~6: 原因攪乱の種類であつて 1, 2, 3, 4, 5 及び 6 はそれぞれ攪乱種類 $\varphi_a, \varrho_a, \psi_a, \varphi_b, \varrho_b$ 及び ψ_b を表す。

U_{ai}, V_{ai} 及び W_{ai} 等々: 攪乱原因だけによるそれぞれ u_a 変位, v_a 変位, w_a 変位などしかし計算及び計算法拡張の便宜のため攪乱 φ_a, ϱ_a 等々及び変位 u_a, v_a 等々をそれぞれ対応的に式(2)で表わし、従つて式(1)はこれを式(3)の如く表わしておくのがよいであろう。

元来攪乱	φ_a	ϱ_a	ψ_a	φ_b	ϱ_b	ψ_b	$\dots\dots\dots (2, a)$
全上の計算上の表示	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	$\dots\dots\dots (2)$
元来の変位	u_a	v_a	w_a	u_b	v_b	w_b	$\dots\dots\dots (2, b)$
全上の計算上の表示	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	

$$\begin{Bmatrix} u_1/\cos\theta \\ u_2/\sin\theta \\ u_3/\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} & U_{26} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} & U_{36} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

時間によつて変化する振動座標が φ であるとして、振動時の位置エネルギー A 及び運動エネルギー T を φ で表わせば式(4)及び式(5)のようになる。

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{ u_1 \varphi_1 \cos\theta + u_2 \varphi_2 \sin\theta + u_3 \varphi_3 \cos\theta + u_4 \varphi_4 \cos\theta + u_5 \varphi_5 \sin\theta + u_6 \varphi_6 \cos\theta \} a d\theta \\ &= \frac{1}{2} C_{11} \varphi_1^2 + \frac{1}{2} C_{22} \varphi_2^2 + \frac{1}{2} C_{33} \varphi_3^2 + \frac{1}{2} C_{44} \varphi_4^2 + \frac{1}{2} C_{55} \varphi_5^2 + \frac{1}{2} C_{66} \varphi_6^2 \\ &\quad + C_{12} \varphi_1 \varphi_2 + C_{13} \varphi_1 \varphi_3 + C_{14} \varphi_1 \varphi_4 + C_{15} \varphi_1 \varphi_5 + C_{16} \varphi_1 \varphi_6 \\ &\quad + C_{23} \varphi_2 \varphi_3 + C_{24} \varphi_2 \varphi_4 + C_{25} \varphi_2 \varphi_5 + C_{26} \varphi_2 \varphi_6 \\ &\quad + C_{34} \varphi_3 \varphi_4 + C_{35} \varphi_3 \varphi_5 + C_{36} \varphi_3 \varphi_6 \\ &\quad + C_{45} \varphi_4 \varphi_5 + C_{46} \varphi_4 \varphi_6 \\ &\quad + C_{56} \varphi_5 \varphi_6 \dots\dots\dots (4, a) \end{aligned}$$

たゞし $C_{ij} = C_{ji} = \pi a U_{ij} = \pi a U_{ji} \dots\dots\dots (4, b)$

$$T = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2\pi a} \right) \int_0^{2\pi} \{ M_1 \dot{u}_1^2 + M_2 \dot{u}_2^2 + M_3 \dot{u}_3^2 + M_4 \dot{u}_4^2 + M_5 \dot{u}_5^2 + M_6 \dot{u}_6^2 \} a d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} a_{33} \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} a_{44} \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} a_{55} \dot{\varphi}_5^2 + \frac{1}{2} a_{66} \dot{\varphi}_6^2 \\
&+ a_{12} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + a_{13} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_3 + a_{14} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_4 + a_{15} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_5 + a_{16} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_6 \\
&+ a_{23} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_3 + a_{24} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_4 + a_{25} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_5 + a_{26} \dot{\varphi}_2 \dot{\varphi}_6 \\
&+ a_{34} \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_4 + a_{35} \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_5 + a_{36} \dot{\varphi}_3 \dot{\varphi}_6 \\
&+ a_{45} \dot{\varphi}_4 \dot{\varphi}_5 + a_{46} \dot{\varphi}_4 \dot{\varphi}_6 \\
&+ a_{56} \dot{\varphi}_5 \dot{\varphi}_6 \quad \dots \quad (5, a)
\end{aligned}$$

たゞし $a_{ij} = a_{ji} = \left(\frac{1}{2} \right) \{ M_1 u_{1i} u_{1j} + M_2 u_{2i} u_{2j} + M_3 u_{3i} u_{3j} + M_4 u_{4i} u_{4j} + M_5 u_{5i} u_{5j} + M_6 u_{6i} u_{6j} \} \quad (5, b)$
 なおいま考えている例では特別に次式(6)が成立している訳である。

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4; \quad M_4 = M_5 = M_6 = M_6 \quad \dots \quad (6)$$

式(4)及び(5)を Lagrange 運動方程式に代入すると式(7)が得られる。

$$[a]\{\ddot{\varphi}\} + [c]\{\dot{\varphi}\} = 0 \quad \dots \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\text{たゞし } [a] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (8) \\
[c] &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \quad (9) \\
\{\varphi\} &= \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_6 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (10)
\end{aligned}$$

式(7)から式(11)が得られる。

$$[D]\{\ddot{\varphi}\} + \{\varphi\} = 0 \quad \dots \quad (11, a)$$

$$\text{たゞし } [D] = [c]^{-1}[a] = [f][a] \quad \dots \quad (11, b)$$

なおマトリックス[f]及び[D]の要素を念のため記るせば次ぎの通りである。すなわち

$$\Delta = \text{マトリックス}[c]の行及び列をそのままに並べたときのデターミナント} \quad \dots \quad (12)$$

$$\Delta_{act} = \text{デターミナント} \Delta \text{の任意要素} c_{act} \text{に関する余因数} \quad \dots \quad (13)$$

$$\text{とすれば } f_{act} = f_{act} = \Delta_{act} / \Delta \quad \dots \quad (14)$$

$$D_{act} = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=1}^6 \Delta_{act} a_{n,t} \quad \dots \quad (15)$$

と記され得る。さてすべての φ が同一円振動数 p をもつて同一基準振動をなしている場合には式(11)は次式(16)で表わされる。

$$\{\varphi\} - p^2 [D]\{\varphi\} = 0 \quad \dots \quad (16, a)$$

$$\text{または } \lambda \{\varphi\} = [D]\{\varphi\} \quad \dots \quad (16, b)$$

$$\text{たゞし } \lambda \equiv 1/p^2 \quad \dots \quad (16, c)$$

式(16, c)における λ は上の連立方程式(16, b)の潜在根にあたり、自由度の数(この例では6個)だけ存在する。これら λ の大小順を $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_6$ とし、 m を充分大なる正整数とすれば $[D]^m$ は次ぎのような形の式で表わされる。そして式(16)中の $\alpha_1: \alpha_2: \dots: \alpha_6$ は λ_1 に対応する φ 比、すなわち $\varphi_1: \varphi_2: \dots: \varphi_6$ に等しく、式(19)の関係になることも、式(16)から証明され得る。

$$[D]^m = \frac{\lambda_1^m}{\prod_{n=1}^6 (\lambda_n - \lambda_1)} \begin{bmatrix} \alpha_1 A_1 & \alpha_1 A_2 & \alpha_1 A_3 & \alpha_1 A_4 & \alpha_1 A_5 & \alpha_1 A_6 \\ \alpha_2 A_1 & \alpha_2 A_2 & \dots & \dots & \dots & \alpha_2 A_6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_6 A_1 & \alpha_6 A_2 & \dots & \dots & \dots & \alpha_6 A_6 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (18)$$

$$\alpha_1: \alpha_2: \dots: \alpha_6 = \varphi_1: \varphi_2: \dots: \varphi_6 \quad \dots \quad (19)$$

従つてはじめに $\{\varphi\}$ のかわりに適當なる $\{\varphi\}_0$ を考え、これを次式(20)の右辺に代入して $\{\varphi\}_1$ を得、この $\{\varphi\}_1$ を式(20)に用いて繰り返えしにより $\{\varphi\}_2$ を得、逐次同様なる代入を進めて充分に大きい繰り返えし回数 m に達したときには、式(21)の關係が得られることとなる。

$$\{\varphi\}_k = [D]\{\varphi\}_{k-1} \dots \dots \dots (20)$$

$$\{\varphi\}_m = [D]^m \{\varphi\}_0 = \frac{\lambda_1^m}{\prod_{i=1}^6 (\lambda_i - \lambda_1)} \begin{Bmatrix} \alpha_1 R_1 \\ \alpha_2 R_1 \\ \vdots \\ \alpha_6 R_1 \end{Bmatrix} \dots (21)$$

$$\text{ただし } R_1 = \sum_{i=1}^6 A_i \varphi_i \dots \dots \dots (22)$$

ゆゑに上記の繰り返えし回数 m を充分大にすることにより式(21)右辺の円柱マトリックス各要素間の比(すなわち α 比)が一定値に収束するに到つた場合、その α 比が φ 比であり(式19参照)、またこのとき逐次代入最後における円柱マトリックス $\{\varphi\}_m$ と $\{\varphi\}_{m-1}$ との対応要素間の比が λ_1 である。

以上は基本振動性狀について記したが、なお式(22)の示す R_1 がゼロになるように $\{\varphi\}_0$ をえらんでおけば以上と同様なる逐次代入計算により2次振動が理論上は算出でき、同様の方法で高次なる振動にも順次及ぶことができる筈である^②。

【Ⅲ】計算例：— いま計算例として図-1中の2層の場合で $\nu=0.5$; $\frac{1}{2}a=2$; $b/a=1$; $\frac{1}{2}a=1/20$; $M_0/H_0=0.6061$ なる諸元のものを考えることとすれば上記逐次代入により基本振動から6次振動までが表-1のように見出される。

次数	振動数 $(= \frac{\omega}{\sqrt{AE}})$ $\sqrt{\frac{AE}{M_0}} \times 10^4$	φ_1 ($\equiv \varphi_a$)	φ_2 ($\equiv \varphi_b$)	φ_3 ($\equiv \varphi_c$)	φ_4 ($\equiv \varphi_d$)	φ_5 ($\equiv \varphi_e$)	φ_6 ($\equiv \varphi_f$)
基本	1/79.629	+1	+4.037	-4.141	+1.2791	+2.815	-2.936
2次	1/27.946	"	+0.9357	-1.1864	+0.6743	-2.630	+3.216
3次	1/12.4973	"	-0.005487	+0.5719	+0.9745	+0.08288	+0.2772
4次	1/9.3366	"	-1.2138	-1.3524	-1.9607	-3.1148	-2.8858
5次	1/8.5213	"	+0.6194	+0.5445	-1.9609	+0.6075	+0.4277
6次	1/8.2118	"	-1.8198	-1.2480	+0.5045	+1.6532	+0.9453

表-1 振動の性狀 (例)(2層)

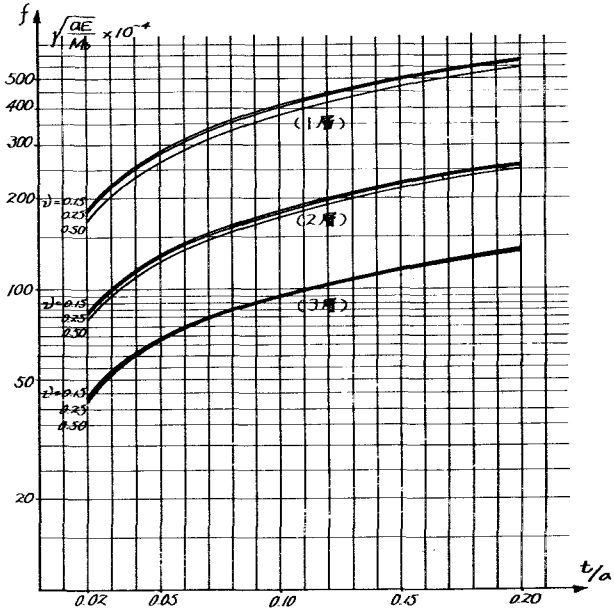


図-3. f 対 t/a 図表

表-1からわかる通り基本振動が目標なるときは ν_a 及び ν_b はこれを考慮外においてもよい。

【Ⅳ】計算の結果：— 通常の場合ならば基本振動がとくに重要であると思われるので、各節円板の周囲にそつて φ 攪乱と δ 攪乱とだけを考慮し図-1の各場合につき $\frac{1}{2}b/a=1$ とし、 $\frac{1}{2}a$ 値と ν 値とを種々にかえて基本振動の振動数を算出すれば結果は図-3のようになる。ただし図-3のうち1層の場合だけは節円板周囲に φ , δ 及び ψ の3種の攪乱を想定して計算をし、かつ図にするととき M_0 を仮想的なる M_0 に換算した計算結果である。

【Ⅴ】計算結果に対する觀察：— 觀察については講演のとき述べる。 (おわり)

① Duncan & Collar; A Method for the Solution of Oscillation Problems by Matrices, Phil. Mag. & Jour. of Sci., XXIV, vol. 17 No. 115,
② Louis A. Pipes; Applied Mathematics for Engineers and Physicists, pp. 188~203