

Ⅲ—46 差分化による感潮水流の2計算法と不規則河道への適用

建設省土木研究所 正員 王 方一
(WANG, Fang-yi)

§1. 概要

前回(第15回, 1960), 不規則矩形河道における非定常流の計算に対して形状要素は等積平均値(図1b)で処理した方がよいと説明した。計算法は不合理な所があった。

今回は新たに工夫改良した三角形・矩形格子併用法と三角形・菱形格子併用法を示す。これら二方法は規則水路, 不規則矩形水路にだけでなく一般的不規則河道に対しても適用出来, 後者に対しては事前に等積平均値を作成しておけば式はそのまゝ使用しうる形になっている。基本假定は「有限区間・時隔内で水位と流量が直線変化をなす」であり, 計算法としては次のような特長をもっている。

- 1). 基本假定のもとでは運動方程式の全項を考慮する場合でも差分式は直接解を得ており試算, 近接誤の量の借用を必要とせずまた各項はそれぞれ意味をもつから $\frac{\partial A}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ を表現する μ , ν , ε などを用いておけばそのまゝ、實用式として使える。
- 2). 等容積的に処理してあるから区域の区分は等区間にして差支えない。
- 3). 直線分布をなす流量を局部實際断面で割れば距離方向に屈折的分布をなす流速が得られる。
- 4). 不正確な断面平均値を使った時の水位・流量に対する影響は推定しやい。

§2. 基本方程式

貯留式: $\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (I)$

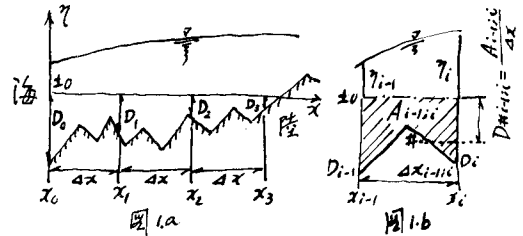
運動式: $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{f}{R} |U| U = 0 \dots\dots\dots (II)$

の2式に基づくが (III) 式はそれに $U = Q/A$; $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Q}{A} \right)$; $U \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{A} \right)$ を入れて変形

した次の式を用いる。

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + g A \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{f}{R} \frac{|Q| Q}{A} = 0 \dots\dots\dots (II-B)$$

ここに η : 水位; Q : 流量; U : 平均流速
 R : 半径, $f = g/C^2 = g n^2 R^{-1/3}$; $\frac{f}{R} = g n^2 R^{-4/3}$;
 C : Chezy の係数; n : Manning の粗度係数
差分化するときには (II-B) 式の係数にある Q と A は Q_m と A_m にする。添字 (m) は方法未定の平均値を意味する。原典は河口におき、陸側を x の正の方向とする。また h を水深 D を x 軸より河床までの距離とすると $h = \eta - D$ の関係があり, x 軸が河床より高ければ D は (-), 低ければ (+) の符号を取る。(図1a)



§3. 三角形・矩形格子併用法

A). 区域内(境界点以外)の諸点

説明の便宜上, 区域を等しい5区間に分け海側境界点 x_0 では $Q_0(t)$, 陸側 x_5 では $Q_5(t)$, また $t=0$ に対して $x_0, x_1, \dots, x_5$ では η と Q が既知とする。(図-2)。

三角形 abc に (I) 式と

(II-B) 式を別々に差分化して解く方法である。

x に関して中央型(両側)差分

$$\text{即ち } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_0 - f_5}{2\Delta x},$$

t に関して前進差

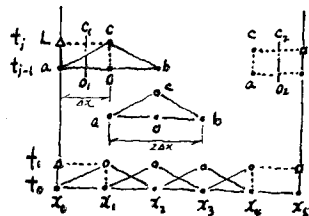


図-2. 三角形・矩形格子併用法

分即ち $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_0 - f_1}{\Delta t}$ を採用する。形状要素は等積平均値(添字*)で表現し水理要素は $Q_m = Q_0$; $Q_m^2 = 1 Q_m / Q_m = 1 Q_0 / Q_0$ とおくと (I) 式より

$$A_{*c} = A_{*0} - \tau \Delta Q_{ab} \quad (3-1)$$

こゝに $\tau = \Delta t / 2 \Delta x$; A_{*c} と A_{*0} はそれぞれ γ_c と γ_0 より定めるものである。また (II-B) 式を同じ三角形について同様に差分化すると

$$Q_c = Q_0 (1 - K_{*0} + \mu_* - \nu_* + \varepsilon_{*0}) - g \tau A_{*0} \Delta \gamma_{ab} \quad (3-2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{こゝに } K_{*0} &= \lambda R_{*0} / U_{*0}; \quad \lambda = g n^2 \Delta t \\ U_{*0} &= Q_0 / A_{*0}; \quad R_{*0} = \frac{1}{2} (R_{*a0} + R_{*b0}) \\ A_{*0} &= \frac{1}{2} (A_{*a0} + A_{*b0}) \\ \mu_* &= (A_{*c} - A_{*0}) / A_{*0} \\ \nu_* &= \tau \Delta Q_{ab} / A_{*0}; \quad \Delta Q_{ab} = Q_b - Q_a \\ \varepsilon_{*0} &= \tau |U_{*0}| (A_b - A_a) / A_{*0} \\ \Delta \gamma_{ab} &= \gamma_b - \gamma_a \end{aligned} \right\} (3-A)$$

添字*は γ_0 に対応する ab 間(長さ $2\Delta x$) の等積平均値, $\#a0$ は γ_0 に対応する ao 間(長さ Δx) のそれである。以後混乱のない限り*と#を略記する。(3-1)式 A_{*c} 従つて γ_c を求めて後(3-2)式より Q_c は求まる。(3-2)式の別の形 $\nu_* = -\mu_* \dots (3-1)_B$ を(3-2)式に入れると一層簡単な式が得られる。

$$Q_c = Q_0 (1 - K_{*0} + 2\mu_* + \varepsilon_{*0}) - g \tau A_{*0} \Delta \gamma_{ab} \quad (3-3)$$

(3-2)と比べると ν_* が消え Q_a と Q_b が現われず性質上 (I) 式と (II-B) 式の連立解に外ならない。次に各種の形状の水路について (3-A) 式中の諸量の求め方を説明する。

a). 一般的不規則形状をなす河道:

図 3a, 3b, 3c のように適当な水位差毎の各 Δx 間の A と R の等積平均値と各区分区分の $A-\gamma$ 曲線を予め作成し, (3-1) 式より求めた A_{*c} を $\frac{1}{2} [A_{\#a0}(\gamma_c) + A_{\#b0}(\gamma_c)]$ と考えて γ_c を求めれば (3-3) 式の各項は定まるから Q_c は求まる。

b). 各断面は矩形をなすが巨離方向に不規

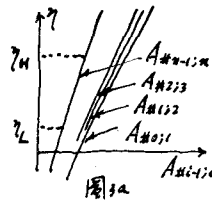


図 3a

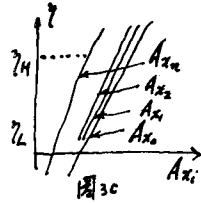


図 3b

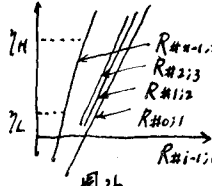


図 3c

則に屈折する場合:

$$\begin{aligned} A_{*0} &= B_{*ab} h_{*0} \text{ を (3-1) に入れ} \\ \text{と } \gamma_c &= \gamma_0 - \Delta Q_{ab} / \left(\frac{B_{*ab}}{\tau} \right) \quad (3-1)_B \end{aligned}$$

Q_c を求めるのに (3-3) 式はそのまま用いるが, (3-A) 式に次のような内容を補足する。

$$\left. \begin{aligned} R_{*0} &\doteq h_{*0} = \gamma_0 - D_{*ab}; \quad D_{*ab} = \frac{1}{2} (D_{*a0} + D_{*b0}) \\ A_{*0} &= B_{*ab} h_{*0}; \quad B_{*ab} = \frac{1}{2} (B_{*a0} + B_{*b0}) \\ A_a &= B_a h_a; \quad h_a = \gamma_a - D_a \\ A_b &= B_b h_b; \quad h_b = \gamma_b - D_b \\ \mu_* &= \Delta \gamma_{oc} / h_{*0}; \quad \Delta \gamma_{oc} = \gamma_c - \gamma_0 \end{aligned} \right\} (3-A)_B$$

各区分の D_{*} と B_{*} を算出すれば D_{*} と B_{*} は隣接の二つを算術平均すれば定まる

c). 中と河床が直線変化をなす矩形水路:
 D_{*} と B_{*} は算術平均値 $\bar{D}_{ab} = \frac{1}{2} (D_a + D_b)$, $\bar{B}_{ab} = \frac{1}{2} (B_a + B_b)$ と一致する。

B]. 境界要素の求め方

a). 海側: 図-2 a 矩形 $aocL$ (I) 式を $(A_{*c1} - A_{*o1}) / \Delta t = - \left(\frac{Q_0 + Q_c - Q_a - Q_L}{2} \right) / \Delta x$ と表現すると

$$Q_L = Q_0 + Q_c - Q_a + (A_{*c1} - A_{*o1}) / \tau \quad (3-4)$$

を得る。こゝに A_{*c1} は $\gamma_{Lc} = \frac{1}{2} (\gamma_L + \gamma_c)$; A_{*o1} は $\gamma_{ao} = \frac{1}{2} (\gamma_a + \gamma_0)$ に対応する A_{*} である。

矩形の場合には

$$Q_L = Q_0 + Q_c - Q_a + (\gamma_L + \gamma_c - \gamma_a - \gamma_0) \frac{B_{*c}}{2\tau} \quad (3-4)_B$$

b). 陸側: (I) 式を同様に矩形 $obRc$ に用いる。

$$\text{と } A_{*c2} = A_{*o2} - \tau (Q_0 + Q_R - Q_0 - Q_c) \quad (3-5)$$

A_{*c2} より γ_{c2} 即ち γ_{cR} を求め, γ_R は $2\gamma_{cR} - \gamma_c$ と求める。矩形の場合には

$$\gamma_R = \gamma_0 + \gamma_b - \gamma_c - (Q_0 + Q_R - Q_0 - Q_c) / \left(\frac{B_{*c}}{2\tau} \right) \quad (3-5)_B$$

C]. 簡略式:

$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 従って (3-2) 式の ε_{*0} を省略すれば

$$Q_c = Q_0(1 - K_{*0} + \mu_{*} - \nu_{*}) - g \tau A_{*0} \Delta \gamma_{ab} \\ = Q_0(1 - K_{*0} + 2\mu_{*}) - g \tau A_{*0} \Delta \gamma_{ab} \quad \dots \dots (3-6)$$

$\frac{\partial Q}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 従って ν_{*} と ε_{*0} を省略すれば

$$Q_c = Q_0(1 - K_{*0} + \mu_{*}) - g \tau A_{*0} \Delta \gamma_{ab} \quad \dots \dots (3-7)$$

$\frac{\partial Q}{\partial t}$ 即ち μ_{*} をも省略するとき

$$Q_c = Q_0(1 - K_{*0}) - g \tau A_{*0} \Delta \gamma_{ab} \quad \dots \dots (3-8)$$

D]. Δt のきめ方:

計算値が發散しないための条件として普通 $\Delta t < \frac{\Delta x}{(U + \sqrt{gh})_{\max}}$ で格子の大きさを定めるが $\Delta t < \Delta x / \sqrt{2gh}$ である文献もあり、一層の検討が期待されている。

§4. 三角形・菱形格子併用法(圖4)

§3と同じ区間数と境界条件を取り初期条件としては x_0, x_2, x_4 での水位と x_1, x_3, x_5 での流量を既知とする。初期三角形 $(\frac{t_0}{x_0})$ $(\frac{t_1}{x_1})$ $(\frac{t_2}{x_2})$ $(\frac{t_3}{x_3})$ $(\frac{t_4}{x_4})$ $(\frac{t_5}{x_5})$ の頂点の水位 $\gamma_0^{(0)}$ と $\gamma_4^{(0)}$ を §3の (3-1) 式で求めた後、 x_1 と x_3 線上の菱形 $\diamond$ の頂点流量のみを、 x_2 と x_4 線上の菱形 $\diamond$ の頂点水位のみを交互に求めて行く方式である。 $\diamond$ については (II-B) 式を x, t に関し共に両側差分化したまた $Q_m = \frac{1}{2}(Q_r + Q_c)$, $Q_m^2 = Q_r \cdot Q_c$ とおくと

$$Q_c = \frac{Q_r(1 + \mu_{*} - \nu_{*}) - g \tau A_{*ab} \Delta \gamma_{ab}}{1 + 2K_{*r} - \mu_{*} + \nu_{*} - 2\varepsilon_{*r}} \quad \dots \dots (4-1)$$

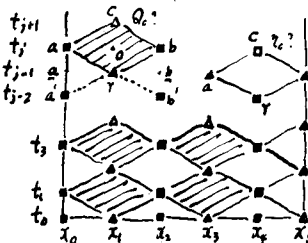


圖4. 三角形・菱形格子併用法

すなわち

$$K_{*r} = \lambda R_{*ab} / |U_{*r}| \\ U_{*r} = Q_r / A_{*} \\ \mu_{*} = (A_{*c} - A_{*r}) / 2A_{*} \\ = (A_{*ab} - A_{*r}) / A_{*} \\ A_{*ab} = A_{*}(\gamma_{ab}) \\ A_{*r} = A_{*}(\gamma_r)$$

$$\gamma_r = \gamma_{ab} - \frac{1}{4}(\gamma_a + \gamma_b - \gamma_a' - \gamma_b')$$

$$\text{または } \gamma_{ab} - \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b - \gamma_a' - \gamma_b')$$

(後者は最初の菱形 $\diamond$ だけに必要)

$$\varepsilon_{*r} = \tau |U_{*r}| (A_b - A_a) / A_{*ab}$$

その他は (3-A) と同じ

$\dots \dots \dots (4-A)$

(3-1)B 式を (4-1) 式に入れると

$$Q_c = \frac{Q_r(1 + 2\mu_{*}) - g \tau A_{*ab} \Delta \gamma_{ab}}{1 + K_{*r} - 2\mu_{*} - 2\varepsilon_{*r}} \quad \dots \dots (4-2)$$

圖3a, 3b, 3c を利用して (4-2) 式より Q_c が求まるが (4-1) 式には ν_{*} 従って Q_a と Q_b が入っているから (4-2) 式だけはこの計算方式で使える。

次に菱形 $\diamond$ に (I) 式を中央型差分化すると

$$A_{*c} = A_{*r} - 2\tau \Delta Q_{ab} \quad \dots \dots (4-3)$$

を得、これより γ_c は求まる。

以上のように γ_c と Q_c を交互に決定し、各点で欠けているもう一つの要素は $x-t$ 面上で比例配分で求める。矩形の場合には (4-A) 式に次のような内容を補足する。

$$\mu_{*} = \Delta \gamma_{rc} / 2h_{*ab} = (\gamma_{ab} - \gamma_r) / h_{*ab} \\ \gamma_{ab} - \gamma_r = \frac{1}{4}(\gamma_a + \gamma_b - \gamma_a' - \gamma_b') \\ \text{または } = \frac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b - \gamma_a' - \gamma_b') \\ \text{その他は (3-A)}_g \text{ と同じ} \quad \dots \dots (4-A)_g$$

また (4-3) 式は

$$\gamma_c = \gamma_r - \Delta Q_{ab} / \left(\frac{B_{*ab}}{2\tau} \right) \quad \dots \dots (4-3)_g$$

簡略式として: 一例として μ_{*} , ν_{*} , ε_{*r} を共に 0 とすると

$$Q_c = \frac{Q_r - g \tau A_{*ab} \Delta \gamma_{ab}}{1 + 2K_{*r}} \quad \dots \dots (4-4)$$

また種々の形状に対しては §3の方法と同様に扱えばよい。

§5. 二計算法の得失

§3の方法は時刻 t_{j-1} の要素から t_j における河道中間点での Q と Q が算出されており境界点を含ま長さ Δx の要素矩形(圖-2)では γ_c と Q_c は両方が既知となるから比較的複雑な境界条件(例えば水門などがある場合など)に対しても順応性が高い。ただ計算を可能にするため γ_c を先に求めてから Q_c が始め

て求まりまた各要素の要素は全部、式で求める面倒さがある。これに対し§4の方法は境界点を考えなくても§3の方法に比し計算量の数が約半分、式の使用回数約半分ですむ速度上の利点があるが境界既知量が区域の両端で異種類であれば区域を奇数区間に、同種類であれば偶数区間に分けて始めて計算方式が可能となる。

§6. 等積平均値使用による効果

河道寸法、粗度係数の外に流量の程度、水位の上昇速度、有限区間、時隔の大きさなども水位、流量の値に影響を及ぼし、且つ多くの橋子を經由して傳達するから不連続面全域に対する一般的傾向の予想は困難である。差当り有限区間、時隔内で流量を一定とて、不正確な平均中、平均水深、粗度を使用した場合、流量、水位に及ぼす影響を考える。便宜上、矩形に閉する(3-1)式と(3-8)式について説明する。(3-1)式を $f(Q_{ab}, B_*)$ と考えると $dQ_c = \frac{\partial f}{\partial Q_{ab}} dQ_{ab} - \frac{\partial f}{\partial B_*} dB_*$(6-1)が成立つ。

また(3-1)式において

$$K_{*0} = g n^2 \Delta t |Q_0| B_*^{-1} h_*^{-3} = f(n, B_*, h_*)$$

$$A_{*0} \Delta Q_{ab} = B_* h_* \Delta Q_{ab} = f(B_*, h_*, \Delta Q_{ab})$$

と考えると

$$\left. \begin{aligned} dK_{*0} &= K_{*0} \left[2 \frac{dn}{n} - \frac{dB_*}{B_*} - \frac{3}{h_*} \frac{dh_*}{h_*} \right] \\ d(A_{*0} \Delta Q_{ab}) &= A_{*0} \Delta Q_{ab} \left[\frac{dB_*}{B_*} + \frac{dh_*}{h_*} + \frac{d(\Delta Q_{ab})}{\Delta Q_{ab}} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots(6-2)$$

の関係がある。

$\frac{dB_*}{B_*}$, $\frac{dh_*}{h_*}$ および $\frac{dn}{n}$ の程度がわかれば、 Q_c に対する影響は

$$dQ_c = Q_0 (-dK_{*0}) - g \Delta(A_{*0} \Delta Q_{ab}) \dots\dots\dots(6-3)$$

で評価される。

(3-3)式を考えると更に $Q_0(2d\mu_*)$ と

$Q_0(d\varepsilon_{*0})$ を考慮すべきであるが $Q_0 \cdot 2\mu_*$ と

$Q_0 \varepsilon_{*0}$ は一般に他に比して非常に小さく、 $\frac{dB_*}{B_*}$ と $\frac{dh_*}{h_*}$ に起因する変化は實用上、無意味な程

高次の微小量になると想像出来るので(6-3)式で dQ_c を推定し、 $Q_0 \cdot 2\mu_*$ と $Q_0 \cdot \varepsilon_{*0}$ で $2\mu_*$ と ε_{*0} の果す役割の重要度を調べ、とるべき平均方式と項数をきめて充分であらう。

§4の方法について(4-4)を同様の考えで扱うことが出来、ここでは省略する。

§7. 結び

二方法を隅田川の観測水理資料と形状に基づいて等積平均値を用いて検証した所、容認する差違内に達したことを認めた。

比較計算の結果と検証、附随公式と従来の公式との比較などは別の報告にゆずる。

本文の出来上りは海岸研究室細井室長より与えられた多くの便宜と従来の人々の労作に多いに負っている。

文献

- 1]. Holsters, H.: <題目省略> La Houille Blanche, 1953, No. 4, pp. 495~509
 - 2]. Schnoor, E.: <省略> Bauingenieur, 34Jg (1959), H. 6, S. 231~240
 - 3]. Rose, D.: <省略> Bauingenieur, 35Jg (1960) H. 8, S. 327
 - 4]. Stoker, J.J.: <Water waves> 1957, §11.5
 - 5]. 王 方-: <差合法による...>
 - a). 土木技術資料 Vol (1961) No. 7.
 - b). <本文と問題>. 土木研究所報告, 号数未定
- 以上 (1961-3-15).