Ⅲ—36　特性曲線による不定流計算法の簡易化

九州大學工學部　正員　上田年比古

1 まえがき　不定流計算における特性曲線法は巧妙な数學的処理による優れた計算法で[1),2),3),4)]あるが、試算法であつて，始めの仮定が違うと，満足すべき式が多いため，かなり面倒な計算が必要であった。本報はこれを改良して，x-t plane における t軸上の点以外は trial なしに求めうる方法を提案し，特性曲線法の簡易化を行ったものである。

2 基礎方程式　V を平均流速，h を水深，Q を流量，S_0 を河床勾配，S_f を摩擦勾配，x を距離，t を時間とすれば，不定流の運動および連続の方程式は，

$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}=g(S_0-S_f) \quad \text{------}(1) \qquad \frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0 \quad \text{---------}(2)$$

いま $A=Wh^m$ とおき係数 W は x の関数，指数 m は定数とすれば，連続式(2)は，

$$m\frac{\partial h}{\partial t}+h\frac{\partial V}{\partial x}+mV\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{Vh}{W}\frac{dW}{dx}=0 \quad \text{---------}(3)$$

(3)式に $\sqrt{g/mh}$ を乗じ，これと(1)式との和および差をとれば，

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(V\pm\sqrt{gh/m})\frac{\partial}{\partial x}\right\}(V\pm 2m\sqrt{gh/m})=g(S_0-S_f)\mp\frac{V\sqrt{gh/m}}{W}\frac{dW}{dx} \quad \text{----}(4)$$

$\sqrt{gh/m}=U$ とおき，上式を特性曲線式で示せば，

$$C_1:\ \frac{dx}{dt}=V+U \text{ 上にて} \text{----}(5) \qquad \frac{d}{dt}(V+2mU)=g(S_0-S_f)-\frac{VU}{W}\frac{dW}{dx} \text{---}(6)$$

$$C_2:\ \frac{dx}{dt}=V-U \text{ 上にて} \text{----}(7) \qquad \frac{d}{dt}(V-2mU)=g(S_0-S_f)+\frac{VU}{W}\frac{dW}{dx} \text{-----}(8)$$

ここに S_f は Manning 式によれば，$S_f=n^2V^2/R^{4/3}=n^2V^2/f(U)$ -----(9)

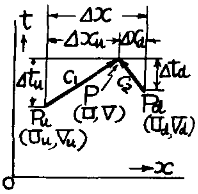

図-1 x-t plane 上の特性曲線説明図

x-t plane 上で，(5)および(7)式の特性曲線の交点における U, V を求めてゆき解をうる。ここでは $\frac{dW}{dx}=0$ で，かつ常流すなわち $V<U$ の場合について考察を進める。図-1 において，P_u は上流側，P_d は下流側の点で，P_u, P_d を出発した特性曲線 C_1, C_2 が P で交るものとする。

この図にしたがつて，$\frac{dW}{dx}=0$ の場合につき(6)式を階差式で示すと，

$$(V+2mU)-(V_u+2mU_u)=gS_0\Delta t_u-g\int_t^{t+\Delta t_u}S_f\,dt \doteqdot gS_0\Delta t_u-g\frac{S_{fu}+S_f}{2}\Delta t_u=K_u\Delta t_u+K\Delta t_u \quad \text{---------}(10)$$

$$\text{ここに}\quad K_u=(S_0-S_{fu})g/2=\left(S_0-\frac{n^2V_u^2}{f(U_u)}\right)g/2, \quad K=(S_0-S_f)g/2=\left(S_0-\frac{n^2V^2}{f(U)}\right)g/2 \quad \text{----}(11)$$

同様にして(5)～(8)式を階差式で示すと，

$$\Delta x_u=(V_u+U_u+V+U)\Delta t_u/2 \text{-----}(12) \qquad V+2mU-K\Delta t_u=V_u+2mU_u+K_u\Delta t_u \text{---------}(13)$$

$$\Delta x_d=(V_d-U_d+V-U)\Delta t_d/2 \text{-----}(14) \qquad V-2mU-K\Delta t_d=V_d-2mU_d+K_d\Delta t_d \text{---------}(15)$$

これら(12)～(15)式により，P_u, P_d の U, V および x-t plane 上の位置を与えて，P の U, V および位置を求める。

3 計算法

(i) t軸上以外の点の U, V 算定法　図-1 において，P_u, P_d を同じ時刻の点とすれば，$\Delta t_u=\Delta t_d=\Delta t$，また P_uP_d 間の距離を Δx とする。

$$(13)-(15)\text{ より}\quad U=\{V_u-V_d+2m(U_u+U_d)+(K_u-K_d)\Delta t\}/4m \quad \text{---}(16)$$

$$(12)-(14)\text{ より}\quad \Delta x=\Delta x_u-\Delta x_d=(2U+V_u-V_d+U_u+U_d)\Delta t/2 \quad \text{--------}(17)$$

$$\therefore\ \Delta t=2\Delta x/(2U+V_u-V_d+U_u+U_d) \quad \text{--------}(18)$$

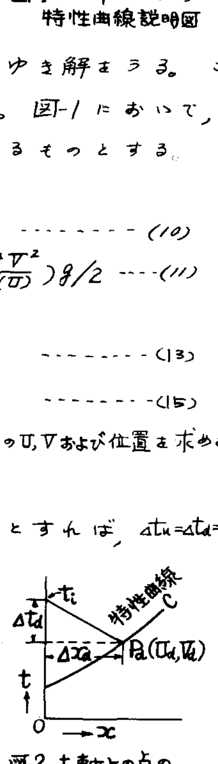

図-2 t軸上の点の算定説明図

これを(16)に入れて，Δt を消去すれば U の算定式として次式をうる。

$$U=-\left(\frac{2m-1}{8m}\right)(V_u-V_d)+\frac{1}{2m}\sqrt{\left\{\left(\frac{2m+1}{4m}\right)(V_u-V_d)+m(U_u+U_d)\right\}^2+m\Delta x(K_u-K_d)} \quad \text{---}(19)$$

次に(13)式より V の算定式として次式をうる。

$$V=\frac{R^{4/3}}{gn^2\Delta t}\left[-1+\sqrt{1+\frac{2gn^2}{R^{4/3}}\Delta t\left\{V_d+2m(U-U_d)+\left(\frac{gS_0}{2}+K_d\right)\Delta t\right\}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots (20)$$

P の位置は(12)式より Δx_u を、(18)式より Δt を求めて定まる。

(ii) t 軸上の V または U の算定法　図-2 において、特性曲線 C 上の U, V がわかっているものとする。いま t_i 点の U が与えられて、V を求める場合を考える。まず Δt_d を仮定して、C 線上の P_d 点を求め、この U_d, V_d を用いて、(20) 式より V を求め、(14)式より Δx_d を算定し、図上の Δx_d と一致するまで trial を行う。V が与えられて U を求める場合も同様に行える。

以上 (i),(ii) を用いて特性曲線による算定法をのべる。始め等流状態（流速 V_0, 水深 h_0 または U_0）の上下流同一断面水路に、上流端から洪水が流入する場合を考え、t 軸上の U が与えられているものとする。まず図-3 の特性曲線 C_0 が引かれる。この線上およびこの内側では、すべて V_0, U_0 である。図-4, 5 の C_0 線は $U=U_0$, $V=V_0$ の直線となる。次に t_1 を出発する特性曲線を求めるに、a の U, V はわかっているから、t_1 の V は (ii) により求められる。次いで t_1 より横軸に平行な線を引き C_0 線との交点 b をとる。$\overline{t_1 b}$ を図上で測り Δx とし、b の U, V を用いて、

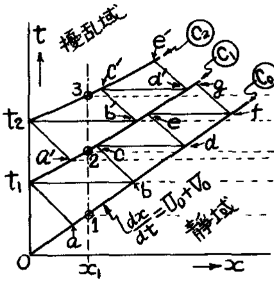

図-3 特性曲線による不定流計算法の説明図

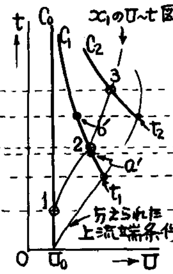

図-4 各特性曲線における U~t 図

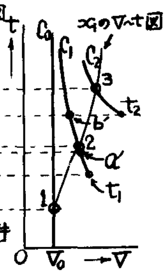

図-5 各特性曲線における V~t 図

(i)の法により c 点の U, V および位置を求める。次に c より横軸に平行線 cd を引き同様にして e を求める。順次このようにして特性曲線 C_1 上の点が求まり、図-4, 5 の C_1 曲線が書ける。この曲線は t_2 を出発する特性曲線を求めるとき、a′, b′, d′, ---- の U, V を知るのに用いる。このようにして t 軸上の点以外の点は trial なしに算定される。ある距離 x_1 の U, V~t 曲線を求めるには、図-3 の x_1 における各特性曲線上の時刻を読みとり、図-4, 5 の相当する曲線、時刻の点 1, 2, 3, --- を結んでゆけばよい。以上は下流端には条件のない場合であるが、下流端で水位時間曲線などの条件が与えられる場合も同様に求められる。

<u>4 適用例</u>　図-6 は本法により新高瀬川[5]の洪水追跡を行ったもので、上流端で時間流量曲線を与えたものである。計算には $n=0.030$ (m, s単位)、$S_0=8.5\times10^{-4}$、$m=1.2$、$W=9.3$ (m単位) を用いた。新高瀬川は $x=1.4$ km 以後は河道勾配が 1.1×10^{-4} の緩勾配となっているため、図の $x=1.9$ km では誤差が大きくなっているが、$x=0.7$, 1.3 km ではよい一致を示している。

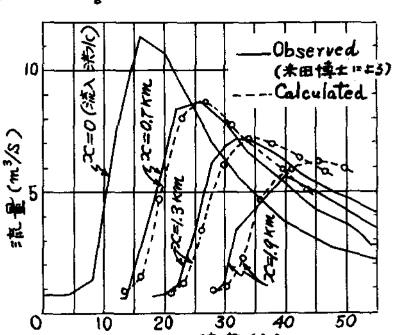

図-6 新高瀬川洪水追跡計算例

<u>5 むすび</u>　本法は $\Delta t_u=\Delta t_d$ とすることにより、trial をなくし、計算を非常に簡略化したものと考える。また図-4, 5 をかいてゆくことは、check しながら計算を進めてゆくこととなる。さらにまた、ある x における U~t, V~t 図は図-4,5上に直ちに求められるなど、有効な方法と考える。

文献
1) 土木学会編：水理公式集 p32～35
2) 岸力：特性曲線法による非定常流の解き方，土研報告 No 85の2 昭28.4
3) Pin Nam Lin：Numerical Analysis of Continuous Unsteady flow in Open Channel, Trans.A.G.U Vol33 No2 1952.
4) 上田年比古：特性曲線による不定流計算法の一試案，九大工学集報 33巻3号 昭35.12
5) 米田正文：淀川計画洪水論 または洪水特性論，昭28.9