Ⅲ－5　開水路水流に関する1次元解析法の流体力学的意義について

京都大学工学部　正員　　岩佐義朗

この研究は，開水路水流に関する1次元解析法の基礎的諸関係 ―― 連続方程式，運動量方程式，エネルギー方程式 ―― を流体力学的方程式から誘導し，1次元解析法の流体力学的意義と今後の研究課題を明らかにしようとするものである。

河道や水路では河床勾配は場所的に一定でないが，1次元解析法では断面は全体の平均量として取り扱われるから，図-1に示すような流れの方向にのみ曲線座標を用いた直交曲線座標系を用いる。ここに，流れの方向にα軸，これと直角上向きにβ軸，α-β面に直角にγ軸とする。変量を普通に用いられる記号に従ってあらわせば，流体力学的基礎方程式はつぎのようである。

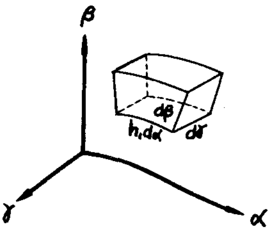

図-1　座標系

(1)　流体力学的基礎方程式

a．平均流に関する連続方程式：

$$\frac{1}{h_1}\left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha}+\frac{\partial}{\partial \beta}(h_1\bar{v})+\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1\bar{w})\right\}=0 \quad , \tag{1}$$

b．平均流に関する運動方程式：

$$\alpha:\quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\bar{u}}{h_1}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \beta}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \gamma}+\frac{\bar{u}\bar{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}+\overline{\frac{u'}{h_1}\frac{\partial u'}{\partial \alpha}}+\overline{v'\frac{\partial u'}{\partial \beta}}+\overline{w'\frac{\partial u'}{\partial \gamma}}+\frac{\overline{u'v'}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}=F_\alpha-\frac{1}{\rho h_1}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \alpha}$$
$$+\frac{1}{\rho h_1}\left\{\frac{\partial \bar{p}_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha}+\frac{\partial}{\partial \beta}(h_1\bar{p}_{\beta\alpha})+\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1\bar{p}_{\gamma\alpha})\right\}+\frac{\bar{p}_{\beta\alpha}}{\rho h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} \quad , \tag{2}$$

$$\beta:\quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\frac{\bar{u}}{h_1}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \alpha}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \gamma}-\frac{\bar{u}^2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}+\overline{\frac{u'}{h_1}\frac{\partial v'}{\partial \alpha}}+\overline{v'\frac{\partial v'}{\partial \beta}}+\overline{w'\frac{\partial v'}{\partial \gamma}}-\frac{\overline{u'u'}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}=F_\beta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \beta}$$
$$+\frac{1}{\rho h_1}\left\{\frac{\partial \bar{p}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}+\frac{\partial}{\partial \beta}(h_1\bar{p}_{\beta\beta})+\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1\bar{p}_{\gamma\beta})\right\}-\frac{\bar{p}_{\alpha\alpha}}{\rho h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} \tag{3}$$

$$\gamma:\quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+\frac{\bar{u}}{h_1}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \alpha}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \beta}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma}+\overline{\frac{u'}{h_1}\frac{\partial w'}{\partial \alpha}}+\overline{v'\frac{\partial w'}{\partial \beta}}+\overline{w'\frac{\partial w'}{\partial \gamma}}=F_\gamma-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \gamma}+\frac{1}{\rho h_1}\left\{\frac{\partial \bar{p}_{\alpha\gamma}}{\partial \alpha}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial \beta}(h_1\bar{p}_{\beta\gamma})+\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1\bar{p}_{\gamma\gamma})\right\} \quad . \tag{4}$$

(2)　開水路水流における境界条件

境界条件としては，水路床における運動学的条件，自由表面における運動学的条件およびその上で立てた単位法線ベクトルと局所的水面勾配との関係が考えられる。水深をh，また法線の方向余弦をl，m，nとし，添字のbおよびsで水路床および自由表面における値を示すと，これらの関係式はそれぞれつぎのようになる。

a．境界面における運動学的条件：

$$\bar{u}_b l_b+\bar{v}_b m_b+\bar{w}_b n_b = \begin{cases} 0 & \cdots\cdots\text{固定境界面} \\ \mp\bar{q}_{nb} & \cdots\cdots\text{滲透性境界面}\ \left(\begin{array}{l}\text{上：流入}\\ \text{下：流出}\end{array}\right)\end{cases} \tag{5}$$

b．自由表面における運動学的条件：

$$\bar{v}_s = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\bar{u}_s}{h_{1s}}\frac{\partial h}{\partial \alpha} + \bar{w}_s\frac{\partial h}{\partial \gamma} \tag{6}$$

c．自由表面における法線ベクトルと水面勾配との関係

$$\ell_s = -\frac{1}{h_{1s}}\frac{\partial h}{\partial \alpha} \quad , \qquad m_s = 1 \quad , \qquad n_s = -\frac{\partial h}{\partial \gamma} \quad . \tag{7}$$

(3) 流体力学的運動量方程式およびエネルギー方程式

a．運動量方程式： これはα軸方向の運動方程式に密度ρを乗じ，表面積Sで囲まれた流体塊Vについて積分すればえられるが，Green-Gauss の定理を用いて変形すると，その結果はつぎのようにあらわされる。

$$\begin{aligned}&\int_V \rho\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}dV + \int_S \rho\bar{u}(\bar{u}\ell + \bar{v}m + \bar{w}n)dS = \int_V \rho F_\alpha dV + \int_S\{(\bar{p}_{\alpha\alpha} - \bar{p} - \rho\overline{u'u'})\ell + (\bar{p}_{\beta\alpha} - \rho\overline{u'v'})m \\ &+ (\bar{p}_{\gamma\alpha} - \rho\overline{u'w'})n\}dS + \int_V \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}(\bar{p}_{\beta\alpha} - \rho\bar{u}\bar{v} - \rho\overline{u'v'})dV \quad .\end{aligned} \tag{8}$$

b．エネルギー方程式： α軸の運動方程式に$\rho\bar{u}$を乗じ，同様にβ軸の式に$\rho\bar{v}$，γ軸の式に$\rho\bar{w}$を乗じ，これらの式を加えて流体塊Vについて積分すればエネルギー式がえられる。すなわち，$\bar{q}^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2$とすると，われわれの取り扱う重力の場ではポテンシャルがあるから，

$$\begin{aligned}&\int_V \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho\bar{q}^2}{2}\right)dV + \int_S\left(\frac{\rho\bar{q}^2}{2}\right)(\bar{u}\ell + \bar{v}m + \bar{w}n)dS = -\int_S \rho\Omega(\bar{u}\ell + \bar{v}m + \bar{w}n)dS + \int_S\{(\bar{p}_{\alpha\alpha} - \bar{p} - \rho\overline{u'u'})\bar{u}\ell \\ &+ (\bar{p}_{\beta\beta} - \bar{p} - \rho\overline{v'v'})\bar{v}m + (\bar{p}_{\gamma\gamma} - \bar{p} - \rho\overline{w'w'})\bar{w}n\}dS - \int_V \frac{1}{h_1}\left\{(\bar{p}_{\alpha\alpha} - \rho\overline{u'u'})\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + (\bar{p}_{\beta\beta} - \rho\overline{v'v'})\frac{\partial}{\partial \beta}(h_1\bar{v})\right. \\ &\left.+ (\bar{p}_{\gamma\gamma} - \rho\overline{w'w'})\frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1\bar{w})\right\}dV + \int_S \bar{u}\{(\bar{p}_{\beta\alpha} - \rho\overline{u'v'})m + (\bar{p}_{\gamma\alpha} - \rho\overline{u'w'})n\}dS + \int_S \bar{v}\{(\bar{p}_{\alpha\beta} - \rho\overline{u'v'})\ell + (\bar{p}_{\gamma\beta} \\ &- \rho\overline{v'w'})n\}dS + \int_S \bar{w}\{(\bar{p}_{\alpha\gamma} - \rho\overline{u'w'})\ell + (\bar{p}_{\beta\gamma} - \rho\overline{v'w'})m\}dS - \int_V \bar{e}_{\alpha\beta}(\bar{p}_{\alpha\beta} - \rho\overline{u'v'})dV - \int_V \bar{e}_{\beta\gamma}(\bar{p}_{\beta\gamma} \\ &- \rho\overline{v'w'})dV - \int_V \bar{e}_{\gamma\alpha}(\bar{p}_{\gamma\alpha} - \rho\overline{u'w'})dV - \int_V \frac{\bar{u}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\rho\bar{u}\bar{v}dV - \int_V \frac{\bar{v}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta}\{(\bar{p}_{\alpha\alpha} - \rho\bar{u}^2 - \rho\overline{u'u'}) - (\bar{p}_{\beta\beta} - \rho\overline{v'v'})\}dV \quad .\end{aligned} \tag{9}$$

(4) 1次元解析法における連続方程式

1次元解析法では未知関数として水深h，平均流速u_m，あるいは流量Qを用いるから，以上の流体力学的諸関係式を(2)節に示した条件によって書きあらためなければならない。まず，連続方程式について示そう。(1)式をVについて積分すると，

$$\int_V \frac{1}{h_1}\left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta}(h_1\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1\bar{w})\right\}dV = 0 \quad . \tag{10}$$

Green-Gauss の定理より

$$\int_S(\bar{u}\ell + \bar{v}m + \bar{w}n)dS = 0 \quad . \tag{11}$$

したがって，α軸上で$d\alpha$だけ隔った2断面で切り，それぞれ断面-1および-2とすると

$$\int_{S_{\alpha 2}}\bar{u}dS_\alpha - \int_{S_{\alpha 1}}\bar{u}dS_\alpha + \int_{S_b}(\bar{u}_b\ell_b + \bar{v}_b m_b + \bar{w}_b n_b)dS_b + \int_{S_S}(\bar{u}_s\ell_s + \bar{v}_s m_s + \bar{w}_s n_s)dS_S = 0 \tag{12}$$

この式に(5)，(6)および(7)式を代入して$d\alpha$でわり，かつ$d\alpha \to 0$とすると，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{S_\alpha}\bar{u}\,dS_\alpha+\int h_{1s}\frac{\partial h}{\partial t}d\gamma=\pm\int h_1\bar{g}_{nb}\,dr\ , \tag{13}$$

がえられる。ここに，r は潤辺長である。この式が1次元解析法の連続式である。

不滲透性水路では，$\bar{g}_{nb}=0$ であるから，

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{S_\alpha}\bar{u}\,dS_\alpha+\int h_{1s}\frac{\partial h}{\partial t}d\gamma=0\ . \tag{14}$$

水路床勾配が一定，あるいは変化してもその割合が小さいときは $h_1\fallingdotseq 1$ である。したがって，Aを流水断面積，u_m を平均流速とすると，

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\alpha}(u_mA)=0\ . \tag{15}$$

という周知の関係式がえられる。

(5) 1次元解析法における運動量方程式

前項と同様の操作で計算をすすめ，かつ $(\bar{p}_{\beta\alpha}-\rho\overline{u'v'})m+(\bar{p}_{\gamma\alpha}-\rho\overline{u'w'})n$ はせん断力の α 軸方向の成分をあらわしていることを考えると，1次元運動量方程式としてつぎのような関係式がえられる。

$$\begin{aligned}&\int_{S_\alpha}h_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dS_\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{S_\alpha}\bar{u}^2dS_\alpha\mp\int h_{1b}\bar{u}_b\bar{g}_{nb}\,dr+\int h_{1s}\bar{u}_s\frac{\partial h}{\partial t}d\gamma=\int_{S_\alpha}h_1F_\alpha\,dS_\alpha+\int\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{p}_{\alpha\alpha}-p-\rho\overline{u'u'})dS_\alpha\\&-\int h_{1b}\frac{\tau}{\rho}dr+\int_{S_\alpha}\frac{1}{\rho}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}(\bar{p}_{\beta\alpha}-\rho\bar{u}\bar{v}-\rho\overline{u'v'})dS_\alpha\ .\end{aligned} \tag{16}$$

不滲透性水路では $\bar{g}_{nb}=0$ であるから，

$$\begin{aligned}&\int_{S_\alpha}h_1\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dS_\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{S_\alpha}\bar{u}^2dS_\alpha+\int h_{1s}\bar{u}_s\frac{\partial h}{\partial t}d\gamma=\int h_1F_\alpha\,dS_\alpha+\int\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{p}_{\alpha\alpha}-p-\rho\overline{u'u'})dS_\alpha-\int h_{1b}\frac{\tau}{\rho}dr\\&+\int_{S_\alpha}\frac{1}{\rho}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}(\bar{p}_{\beta\alpha}-\rho\bar{u}\bar{v}-\rho\overline{u'v'})dS_\alpha\ .\end{aligned} \tag{17}$$

つぎに，$h_1\approx 1$ であれば，上式は簡単に

$$\int_{S_\alpha}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}dS_\alpha+\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{S_\alpha}\bar{u}^2dS_\alpha+\int\bar{u}_s\frac{\partial h}{\partial t}d\gamma=\int_{S_\alpha}F_\alpha\,dS_\alpha+\int\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\bar{p}_{\alpha\alpha}-\bar{p}-\rho\overline{u'u'})dS_\alpha-\int\frac{\tau}{\rho}dr\ , \tag{18}$$

となり，明らかに完全な乱流領域では $\bar{p}_{\alpha\alpha}$ は無視される。

開水路水流の1次元水理解析法で古くから用いられている運動量方程式との関連を明らかにするため，表面流速が水路巾に亘って一様であり，かつ $(\bar{p}+\rho\overline{u'u'})$ が静水圧の法則に従うものと仮定する。この条件を用いると，(18) 式は次のような周知の関係となる。

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}+\beta u_m\frac{\partial u_m}{\partial\alpha}+g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial x}+(1-\beta)\frac{u_m}{A}\frac{\partial A}{\partial t}=g\sin\theta-\frac{\tau}{\rho R}\ . \tag{19}$$

(6) 1次元解析法におけるエネルギー方程式

流体力学的エネルギー方程式(9)において，完全な乱流では $\bar{p}_{\beta\gamma}$, $\bar{p}_{\gamma\alpha}$, $\bar{p}_{\alpha\beta}$, $\bar{e}_{\beta\gamma}$, $\bar{e}_{\gamma\alpha}$, $\bar{e}_{\alpha\beta}$ はいずれも無視される。またさらに，本質的には乱流せん断流で矛盾する仮定であるが，G. H. Keulegan が行なったように，流れの等方性的要素によって圧力分布が定まるものと仮定する。この場合，さきに示した運動量方程式を導いた方法と全く同様にして1次元解析法におけるエネルギー方程式をうることができる。すなわち，

$$\int_{S_\alpha} h_1 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{q}^2}{2}\right) dS_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}\int \left(\frac{\bar{q}^2}{2}\right)\bar{u}\, dS_\alpha \mp \int h_{1b}\left(\frac{\bar{q}_b^2}{2}\right)\bar{q}_{nb}\, dr + \int h_{1s}\left(\frac{\bar{q}_s^2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial t}\, d\gamma = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{S_\alpha}\Omega\bar{u}\, dS_\alpha \pm \int h_{1b}\Omega_b \bar{q}_{nb}\, dr$$
$$-\int h_{1s}\Omega_s \frac{\partial h}{\partial t}\, d\gamma + \frac{\partial}{\partial \alpha}\int \frac{\bar{u}}{\rho}(-p - \rho\overline{u'u'})\, dS_\alpha \mp \int \frac{1}{\rho}(-\bar{p}_b - \rho\overline{u'u'_b})\bar{q}_{nb} h_{1b}\, dr + \int \frac{1}{\rho}(-\bar{p}_s - \rho\overline{u'u'_s}) h_{1s}\frac{\partial h}{\partial t}\, d\gamma \qquad (20)$$
$$-\int \bar{u}_b \frac{\tau_\alpha}{\rho} h_{1b}\, dr - \int \bar{w}_b \frac{\tau_\gamma}{\rho} h_{1b}\, dr \ .$$

不滲透性水路で河床がゆるやかに変化するときには,

$$\int_{S_\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{q}^2}{2}\right) dS_\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha}\int\left(\frac{\bar{q}^2}{2}\right)\bar{u}\, dS_\alpha + \int\left(\frac{\bar{q}_s^2}{2}\right)\frac{\partial h}{\partial t}\, d\gamma = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_{S_\alpha}\bar{u}\Omega\, dS_\alpha - \int \Omega_s\frac{\partial h}{\partial t}\, d\gamma + \frac{\partial}{\partial \alpha}\int\frac{\bar{u}}{\rho}(-\bar{p} - \rho\overline{u'u'})\, dS_\alpha \qquad (21)$$
$$+\int \frac{1}{\rho}(-\bar{p}_s - \rho\overline{u'u'_s})\frac{\partial h}{\partial t}\, d\gamma - \int \bar{u}_b\frac{\tau_\alpha}{\rho}\, dr - \int \bar{w}_b \frac{\tau_\gamma}{\rho}\, dr$$

となる。

(21) 式において, 圧力分布は静水圧的であり, かつ流れは一方向（ここではα方向）にのみ卓越していると仮定する。この場合, Dをエネルギー測定の基準面から河床までの高さとすると, $\Omega = g\cos\theta\beta - gD$ であるから, (21) 式は周知のエネルギー方程式

$$\beta\frac{\partial U_m}{\partial t} + \alpha U_m \frac{\partial U_m}{\partial \alpha} + g\cos\theta\frac{\partial h}{\partial \alpha} + (\beta - \alpha)\frac{U_m}{2A}\frac{\partial A}{\partial t} = g\sin\theta - \frac{\tau}{\rho R}\frac{\bar{U}_b}{U_m} \ , \qquad (22)$$

がえられることになる。

以上に示したように, 開水路水理学における1次元解析法の基礎方程式は直交曲線座標系の流体力学的運動方程式より若干の仮定を用いることによって誘導される。誘導法の詳細については, 講演時に説明を加えるが, これらの仮定には流れの乱流機構に関するものと, 水路の幾何学的形状に関連する平均流的操作に関するものがあり, とくに前者については未知の多くの問題がある。このような問題が現段階における開水路における1次元水理学の理論的解析法の限界を形づくるとともに, 今後における水理研究の基本的課題でもある。

本研究を遂行するに当り, 絶えず御懇篤な指導を賜わった石原藤次郎教授に厚く感謝の意を表する。