

III-4 長方形開水路における層流の流れについて

日本大学 正員 木村喜代治

等流状態の層流の流れは、Navier-Stokes の式が適当に座標軸を取ると Poisson 形微分方程式となり、これを境界値問題として解くわけである。弾性棒の捻りの問題も同形となり、長方形断面では Saint-Venant の捻りの理論から求めた結果がある¹⁾。またこれとは別に流れの粘性によるエネルギーの逸散が最小になると言う条件からも求められている²⁾。

本報は専ら長方形板の単純支持のタフミの問題について Navier が用いた方法³⁾と同様な方法によつて、上述前者の問題として水面で速度勾配ゼロの条件を用いて開水路として取扱ひ、簡単に厳密解を導いた。結果は上述後者のものと同一になった。勿論両結果は等値なものであるから、一方から他方を導き得るものであり、その結果を示した。またこれを用いて流量、摩擦係数、境界摩擦力、および幅の広い水路における側壁の影響なども合わせて計算した。

等流状態の Navier-Stokes の式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{wI}{\mu} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} y=0 \text{ で } u=0, & \quad y=b \text{ で } u=0 \\ z=0 \text{ で } u=0, & \quad z=h \text{ で } \frac{\partial u}{\partial z}=0 \end{aligned} \right\} \text{境界条件}$$

座標は図-1 の様にとる。

ここで、上式の解として

$$u = \sum_m \sum_n \frac{A_{mn}}{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{h}\right\}^2} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cdot \cos\left\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{h}(z-h)\right\} \quad (2)$$

と置く、ただし $m=1, 2, 3, \dots, \infty$, $n=0, 1, 2, \dots, \infty$ 。

式(2)は全部の境界条件を満足している。

式(2)を式(1)に入れ A_{mn} を決定すると

$$u = \sum_m \sum_n \frac{(-1)^n 8wI}{\mu \pi^2 m (n+\frac{1}{2}) \left\{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{h}\right\}^2\right\}} \times \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cdot \cos\left\{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{h}(z-h)\right\} \quad (3)$$

ただし $m=1, 3, 5, \dots, \infty$, $n=0, 1, 2, \dots, \infty$

更に、これを整理すると

$$u = \sum_m \sum_n \frac{64wIh^2}{\mu \pi^4 m n \left\{\left(\frac{2h}{b}m\right)^2 + n^2\right\}} \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) \quad (4)$$

となる。ただし $m, n=1, 3, 5, \dots, \infty$ 。

$\frac{h}{b} \leq 0.5$ のときは、この二重級数において $\sum_m$ の方が収束が速いから、 $\sum_n$ について計算

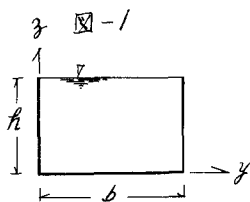
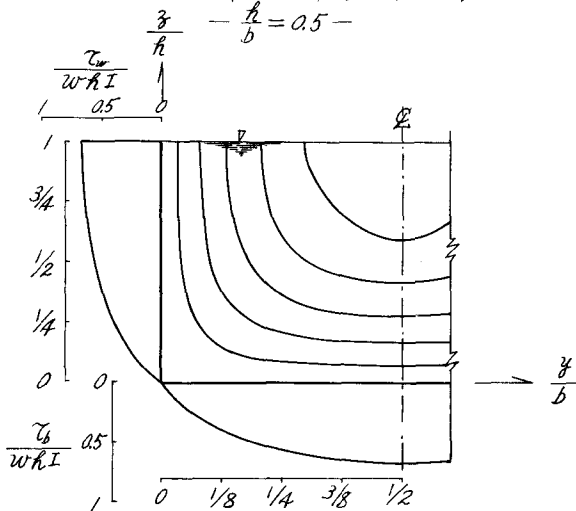


図-2 速度分布、境界摩擦力分布



に $\sum_n$ の無限級数の形に変形すると

$$u = \frac{wI}{\mu} \left[3\left(h - \frac{3}{2}\right) - \frac{16h^2}{\pi^3} \sum_n \frac{1}{n^3} \frac{\cosh\left\{\frac{nb\pi}{4h}\left(1 - \frac{2y}{b}\right)\right\}}{\cosh\left(\frac{nb\pi}{4h}\right)} \cdot \sin\left(\frac{n\pi z}{2h}\right) \right] \quad (5)$$

また $\frac{h}{b} \geq 0.5$ のときは, $\sum_n$ につき計算し $\sum_n$ の無限級数の形にすると

$$u = \frac{wI}{\mu} \left[\frac{y}{2}(b-y) - \frac{4b^2}{\pi^3} \sum_m \frac{1}{m^3} \frac{\cosh\left\{\frac{mb\pi}{b}\left(1 - \frac{z}{h}\right)\right\}}{\cosh\left(\frac{mb\pi}{b}\right)} \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \right] \quad (6)$$

流量の計算は $Q = \int_0^b \int_0^h u \, dy \, dz$ であり,
無次元流量として $Q^* = \frac{Q\mu}{wIA^2}$ とすると

$$Q^* = \frac{128}{\pi^6} \sum_n \sum_m \frac{\frac{2h}{b}}{m^2 n^2 \left\{ \left(\frac{2h}{b}n\right)^2 + n^2 \right\}} \quad (7)$$

$$= \frac{h}{3b} - \frac{128}{\pi^6} \left(\frac{h}{b}\right)^2 \sum_n \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{nb\pi}{4h}\right) \quad (8)$$

$$= \frac{b}{12h} - \frac{8}{\pi^6} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \sum_m \frac{1}{m^5} \tanh\left(\frac{mb\pi}{b}\right) \quad (9)$$

となる. 式(7)において $\frac{2h}{b} = X$ と置くと

$$Q^* = \frac{128}{\pi^6} f(X)$$

ニ z $\lim_{X \rightarrow 0} Q^* = 0$, $\lim_{X \rightarrow \infty} Q^* = 0$ であり,

$X < 1$ のとき $f'(X) > 0$ すなはち増加関数

$X = 0$ のとき $f'(X) = 0$ 極大値

$X > 1$ のとき $f'(X) < 0$ 減少関数

となる, また $f(X) = f\left(\frac{1}{X}\right)$ であるが

ら, X とその反転上における関数値が同一と言うことであり, 二のことから $X=1$ が極値になることがわかる. 同時に X 且盛として等比数列の目盛を用いれば, $X=1$ を軸として対象になることも理解される.

Darcy-Weisbach の摩擦係数
を求めると

$$\lambda = \frac{2RV}{Q^* A u_m} = \frac{\frac{2h}{b}}{\left(\frac{2h}{b} + 1\right)^2 Q^*} \cdot \frac{1}{Re} = \frac{\varepsilon}{Re} \quad (10)$$

ニ ε を計算したのが図-4 2.

ニれもまた, $\frac{h}{b} = 0.5$ が極少値

となり, $\frac{h}{b}$ に等比数列目盛を用い, $\frac{h}{b} = 0.5$ を軸として対象になることがわかる.

底面の摩擦力は $\tau_b = \mu \left(\frac{2u}{3}\right)_{z=0}$

図-3 $Q^* - \frac{h}{b}$ 曲線

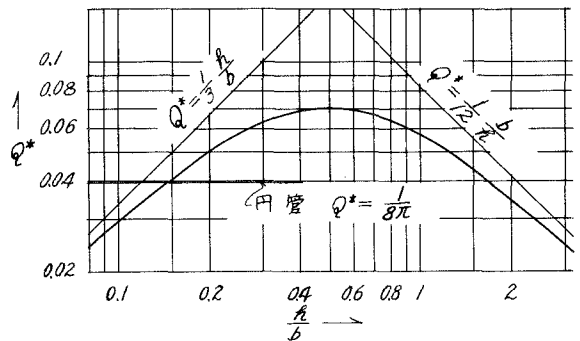
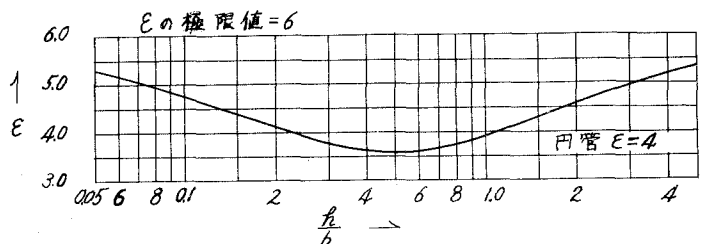


図-4 $\varepsilon - \frac{h}{b}$ 曲線



式(5)より計算すると

$$\tau_b = w I h \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\cosh \left\{ \frac{n b \pi}{4 h} \left(1 - \frac{2 y}{b} \right) \right\}}{\cosh \left(\frac{n b \pi}{4 h} \right)} \right] \quad (11)$$

また式(6)を用いると

$$\tau_b = w I b \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \tanh \left(\frac{m h \pi}{b} \right) \cdot \sin \left(\frac{m \pi y}{b} \right) \quad (12)$$

側壁面の摩擦力は $\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$

式(6)より計算すると

$$\tau_w = w I \frac{b}{2} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{\cosh \left\{ \frac{m h \pi}{b} \left(1 - \frac{2 y}{h} \right) \right\}}{\cosh \left(\frac{m h \pi}{b} \right)} \right] \quad (13)$$

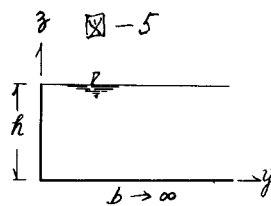
また式(5)を用いると

$$\tau_w = w I \frac{8 h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \tanh \left(\frac{n b \pi}{4 h} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \pi y}{2 h} \right) \quad (14)$$

当然のことであるが、これらの式を用いて断面全体の平均摩擦力を計算すると $w I R$ になる。

幅の大きな水路における、側壁近くの流れに及ぼす、側壁の影響を調べてみる。図-5 の様に $b \rightarrow \infty$ にすると

$$\begin{aligned} u &= \frac{16 w I h^2}{\mu \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left\{ 1 - e^{-\frac{n \pi y}{2 h}} \right\} \sin \left(\frac{n \pi y}{2 h} \right) \\ &= \frac{w I}{\mu} \left\{ 3 \left(h - \frac{y}{2} \right) - \frac{16 h^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\frac{n \pi y}{2 h}} \cdot \sin \left(\frac{n \pi y}{2 h} \right) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$



となる。=次元の流れでは上式

で $y \rightarrow \infty$ とすると

$$u = \frac{w I}{\mu} 3 \left(h - \frac{y}{2} \right)$$

このL形の流れの底面の摩擦力は

$$\tau_b = w I h \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n \pi y}{2 h}} \right\} \quad (17)$$

また側壁面の摩擦力は

$$\tau_w = w I \frac{8 h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \left(\frac{n \pi y}{2 h} \right)$$

となる。

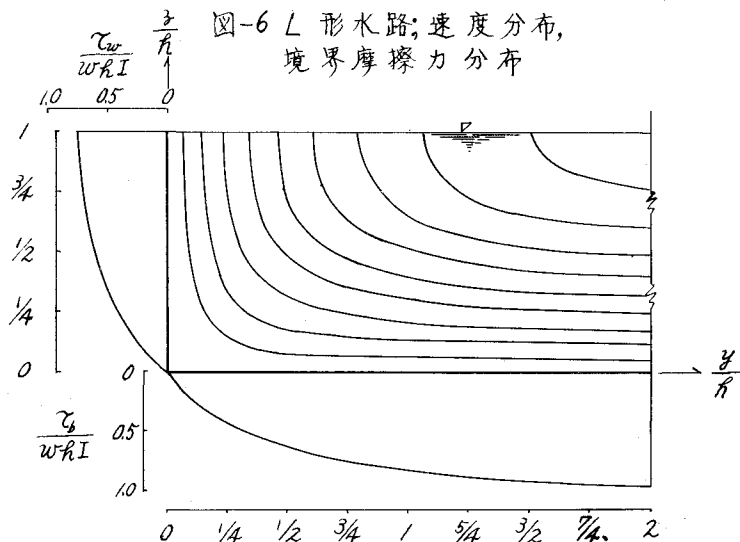
速度に及ぼす側壁の影響を調べ

るため

$$[u]_{y \rightarrow \infty} = u_i$$

とすると

図-6 L形水路; 速度分布, 境界摩擦力分布



$$\frac{u_i - u}{u_i} = \frac{1}{\beta/h (1 - \beta/2h)} \frac{16}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^3} e^{-\frac{\pi n \beta}{2h}} \sin\left(\frac{\pi n \beta}{2h}\right) = N \quad (18)$$

同じく、底面摩擦力に及ぼす側壁の影響を調べよために

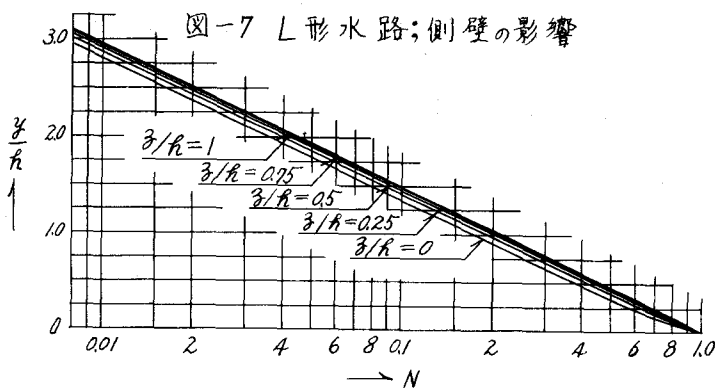
$$[\tau_b]_{\beta \rightarrow \infty} = \tau_{bi}$$

とすると

$$\frac{\tau_{bi} - \tau_b}{\tau_{bi}} = \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{n^2} e^{-\frac{\pi n \beta}{2h}} = N \quad (19)$$

この式は式(18)で $\beta \rightarrow 0$ に当たる。これらの式を用いて N を計算すると図-7 の様になる。この N の値はほとんど無限級数の第一項のみで充分であり、特に β/h が大きくなるに従ってますます正しくなる。図の様には、射数を取るとほぼ直線となる。

本研究は日本大学栗津清蔵、
小杉巖両教授の指導を得た、ここに記して厚く御礼申し上げます。



参考文献

- 1) 本間 仁 記 ; ミュラー粘性流体の力学, コロナ社
- 2) 伊藤 英 覺 ; 直管及び曲管内の層流理論, 東北大学研究報告第4巻35号
- 3) A.E.H. Love ; Mathematical Theory of Elasticity, Fourth edition Cambridge