Ⅲ－2　開水路水流における defect law について

京大大学院学生　　正員　　村本嘉雄

defect law は Darcy が最初に提唱した流速分布に関する経験法則であるが，その後，Prandtl および Kármán によって理論的裏付けがなされ，また Millikan は乱流場の構造に言及することなしに defect law と境界条件より流速分布の対数則を誘導している。このように defect law は二次元の乱流場における平均流の普遍的法則と考えられるが，いままで開水路水流に関しては十分な検討がなされなく，大部分の流速分布式は

$$\frac{\bar{u}_H-\bar{u}}{u_*}=-\frac{1}{\kappa}\ln\frac{z}{H} \qquad (1)$$

の defect law に帰結する関数形を用いている。ただし，u_* は摩擦速度，κ は Kármán 定数，$\bar{u}_H$, $\bar{u}$ はそれぞれ水深H，深さ z の点における流速である。この式の誘導過程はよく知られているように，運動方程式を

$$d/dz\,(-\rho\overline{u'w'})=0 \quad \text{すなわち，} \quad -\rho\overline{u'w'}=\tau_0\ (=\mathrm{const}) \qquad (2)$$

と考え，Reynolds 応力 $-\rho\overline{u'w'}$ に運動量輸送理論および混合距離の仮定を用いて求められる。ここに，τ_0 は路床におけるせん断応力を表わす。しかし，(2)式は重力の影響を無視した式であって，上層の水流に引きずられて流れる下層部分の運動，すなわち乱流境界層内の状態を記述する関係式と考えられる。したがって，一般の開水路水流では(2)式から誘導するのは正しくなく，また最近 Hinze が(1)式に補正関数を付加した式を検討しているが，このことからも開水路水流における defect law の誘導過程および最終式を今一度吟味する必要があると考える。

1．運動方程式からの誘導　二次元定流の Navier－Stokes の運動方程式は x，z 座標をそれぞれ流れ方向および鉛直方向にとり，路床の傾斜角 θ とすると，

$$\begin{cases} 0=-\partial\bar{p}/\partial x+\partial/\partial z\,(\mu\,\partial\bar{u}/\partial z-\rho\overline{u'w'})+\rho g\sin\theta & (3)\\ 0=\partial/\partial z\,(-\bar{p}-\rho\overline{w'w'})-\rho g\cos\theta & (4)\end{cases}$$

と表わされ，(4)式を z＝H で圧力 $\bar{p}=0$ の条件で積分すると，

$$\bar{p}=\rho g\cos\theta\,(H-z)+\rho\,(\overline{w'w'}|_H-\overline{w'w'}|_z)$$

となる。したがって，(3)式において $\partial\bar{p}/\partial x=0$，また defect law では完全乱流場を対象としているので粘性項を無視し，z＝H で $-\rho\overline{u'w'}=0$ の条件で積分すると，

$$-\rho\overline{u'w'}=\rho g\sin\theta\,(H-z) \qquad (5)$$

となり，完全乱流域において $-\rho\overline{u'w'}$ は直線分布をなすことがわかる。また，このことは非等方性乱流に関する実測結果（谷一郎「乱流理論」P.34）によって実証されている。つぎに流れ全体の力の平衡関係を考え，路床で重力に対抗するせん断応力 $\tau_0\,(=\rho gH\sin\theta)$ を仮定し，また $-\rho\overline{u'w'}$ を運動量輸送理論より平均流 $\bar{u}$ に還元すると，(5)式は

$$-\rho\overline{u'w'}=\rho l^2\left|\frac{d\bar{u}}{dz}\right|\frac{d\bar{u}}{dz}=\tau_0\left(1-\frac{z}{H}\right) \qquad (6)$$

と表わされる。ここで，混合距離 l として Prandtl ならびに Kármán の仮定を用いて(6)式より defect law を求めると，

(i) Prandtl の仮定；$l = \kappa z$ および境界条件 $z = H$ で $\bar{u} = \bar{u}_H$ より

$$\frac{\bar{u}_H - \bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa}\left\{ \ln \frac{(1 + \sqrt{1 - z/H})}{(1 - \sqrt{1 - z/H})} - 2\sqrt{1 - \frac{z}{H}} \right\} \qquad (7)$$

(ii) Kármán の仮定；$l = \kappa (d\bar{u}/dz)/(d^2\bar{u}/dz^2)$ および境界条件として完全乱流域の限界 $z = \delta$ で $|d\bar{u}/dz|_\delta \approx \infty$，$z = H$ で $\bar{u} = \bar{u}_H$ を用いると，

$$\frac{\bar{u}_H - \bar{u}}{u_*} = -\frac{1}{\kappa}\left\{ \sqrt{1 - \frac{z}{H}} + \ln\left(1 - \sqrt{1 - \frac{z}{H}}\right) \right\} \qquad (8)$$

となり，圧力差のある場合の円管流における defect law の関数形に一致する。

2. エネルギー式からの誘導　運動方程式と同様に定常状態の変動平均場を対象とすると，非等方性乱流におけるエネルギー平衡は Laufer の実験から推察されるように，断面の主要領域では Reynolds 応力によるエネルギー生成項($\bar{E}_{R'}$)と粘性によるエネルギー逸散項($\bar{E}_{D'}$)が釣合っていると考えられる。両項のうち，$\bar{E}_{D'}$は平均渦長あるいは混合距離などの代表長を l とするとき，$\bar{E}_{D'} \sim \rho(\sqrt{\overline{u'^2}})^3/l$ と表わされ，また Reynolds 数が十分大きい場合 $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*$ の値は水路の粗，滑に無関係に相対距離 z/H のある一定の関数となるので $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_* \sim f(z/H)$ と考えることができ，これより

$$\bar{E}_{D'} \sim \rho u_*^3 f^3(z/H)/l$$

となる。一方，$\bar{E}_{R'}$は(6)式より $-\rho\overline{u'w'} \sim \rho u_*^2(1 - z/H)$ と表わされるので

$$\bar{E}_{R'} = -\rho\overline{u'w'}\, d\bar{u}/dz \sim \rho u_*^2 (1 - z/H)\, d\bar{u}/dz$$

となり，この $\bar{E}_{D'}$，$\bar{E}_{R'}$の両式から

$$l\, d\bar{u}/dz \sim u_* f^3(z/H)/(1 - z/H) \qquad (9)$$

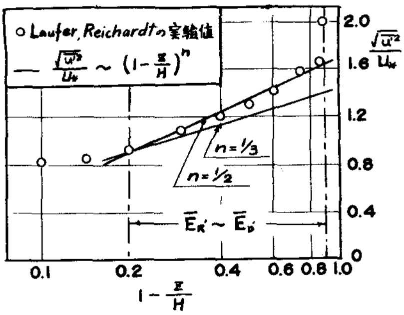
を得る。したがって，$\bar{u}$分布を求めるには l の仮定ならびに $f(z/H)$ の関数形すなわち $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*$ 分布が問題となる。いま $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*$ 分布を $(1 - z/H)^n$ と仮定し，$n = 1/3$ とすると，(9)式は

$$l\, d\bar{u}/dz \sim u_*$$

となり，l として上述の(i),(ii)いずれの仮定を用いても(1)式に帰着する。また，$n = 1/2$ とすると，(9)式は

$$l\, d\bar{u}/dz \sim u_*/\sqrt{1 - z/H}$$

となり，l として(i),(ii)を用いるとそれぞれ(7),(8)式を得る。ここで，非等方性乱流場における $\sqrt{\overline{u'^2}}/u_*$ 分布を Laufer および Reichardt の実験値より検討してみると右図に示す通りであって，いま対象としている $\bar{E}_{R'} \sim \bar{E}_{D'}$ 領域においては明らかに $n = 1/3$ より $n = 1/2$ の関数形に近い分布をなしており，エネルギー式からも(7),(8)式の妥当性を認めることができる。



以上，誘導過程より defect law を吟味したが，(7),(8)式の優位性については開水路における $\bar{u}$分布の実験値からも検証することができる。この実験値との比較および通常用いられる路床条件を加味した流速分布式，平均流速式については講演時に述べる。