

II-58 木造重ねバリの曲げ理論と合成効果について

都立大学 正員 山本 稔

従来使用されてきた重ねバリの計算法では、完全合成の重ねバリとして計算した総断面にかんする断面係数および断面二次モーメントに経験によって定められたある一定の効率を乗じて重ねバリの断面係数および断面二次モーメントとし、単一断面のバリと同様に縁応力およびたわみを求めるという手段をとっている。この方法は、単純バリ理論を直接利用しているから極めて便利な方法ではあるが、理論的には種々の矛盾を包蔵しているため合理的な計算法とはいえない。そこでこれら矛盾を解消する一策として、筆者は、断面二次モーメントに対する効率が先に筆者によって与えられた不完全合成桁の曲げ理論¹⁾における断面二次モーメント増加率から理論的に容易に定義できることに着目し、ここに木造重ねバリの曲げ理論を構成することにした。もちろん先の曲げ理論が木構造における二層重ねバリの一般的理論として利用できることに異論はないが、木造では三層重ねバリも使用されるので、先の理論をそのまま利用するためには理論はここまで拡張されなければならない。しかし、この理論を一般的に拡張すると、計算式にかなり複雑な形のもものが現われ、いたずらに理論をもてあそぶ感がまねがれぬようにみえた。そこで立場をかえ、三層重ねバリは木構造において利用されるに過ぎないこと、またこの方面においては使用材料の掣肘から重ねバリの断面にも自ずと制限があることなどを考え、木構造に適した構造について別個に重ねバリ理論を構成し、かくして理論の簡明化を計った方が得策であるとの結論を得たので、ここに改めて木造重ねバリの曲げ理論という名のもとに理論を取り扱うことにしたわけである。このような事情から、次に与える二層重ねバリ理論は、先に触れた曲げ理論¹⁾の特殊な構造の場合を表わすことになる。従つて、木構造において使用しやすい形に変形されているとはいえ、本質的に同じ解であることはいうまでもない。そこで二層重ねバリにおいては重複を避けるため簡単に触れるに留め、主として三層重ねバリにおいて理論を構成することにする。

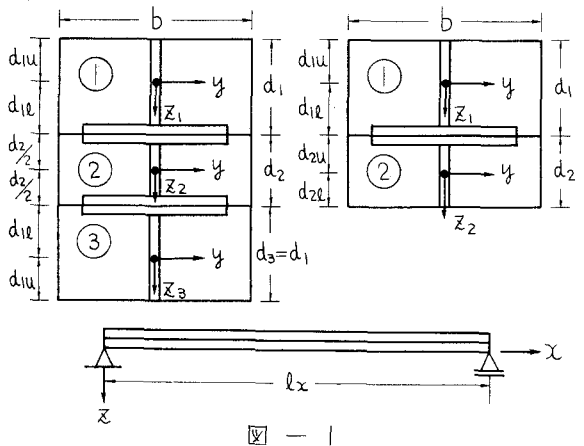


図 - 1

ここに取り扱う重ねバリは図-1に示すごとき形状の単純支持の重ねバリである。そして解析上の都合からその構成部材を上側から①部材、②部材および③部材（二層重ねバリにおいては①および②部材）と呼ぶことにし、記号にもその右下側に添字1, 2, 3を付して各記号が属する材を表わさしめるものと約束する。同様に、接合面も上から①接合面および②接合面（二層の場合は①接合面）と呼び、接合面に働く応力記号にも、またその上側に一を付するとともに右下側に添字1, 2を付して各数字の示す接合面を指示せしめ

るものとする。このように簡略化した名称ならびに記号を用いると、理論解析において設けた仮定は次のように書き表わされる。

(1) ①, ②および③部材は各ヤング率 E_w をもつ等方等質の完全弾性体で、図-1のごとき矩形断面をもつ一様な部材である。またこれら構成部材の変形および応力は、初等はり理論に従って計算されるが、このときジベルあるいはボルトによる断面の欠損部分は、無効断面として差し引いて考えることにする。

(2) 接合面には一般に仮定されているように次の関係式が成立つものとする。

$$\bar{\tau}_1 = R \delta_1 = R \left(u_2 \Big|_{z_2 = -\frac{1}{2}d_2} - u_1 \Big|_{z_1 = d_{1l}} \right), \quad \bar{\tau}_2 = R \delta_2 = R \left(u_3 \Big|_{z_3 = -d_{1l}} - u_2 \Big|_{z_2 = \frac{1}{2}d_2} \right) \quad (1)$$

ここに $\bar{\tau}$ は接合面のせん断応力、 R は接合面のズレ常数、 δ は接合面のズレ、 u は x -方向の変位である。

これらの仮定のもとに曲げの級数解を求めるに当たり、さらに接合面のせん断応力 $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ および直応力 $\bar{\sigma}_1$, $\bar{\sigma}_2$ を

$$\bar{\tau}_1 = P \tau'_m \cos \xi_m, \quad \bar{\tau}_2 = P \tau'_{2m} \cos \xi_m, \quad \bar{\sigma}_1 = P \lambda_m \sin \xi_m, \quad \bar{\sigma}_2 = P \lambda_{2m} \sin \xi_m, \quad \xi_m = \frac{n\pi x}{L_x} \quad (2)$$

と置く。ここに P は応力度と単位を同じくする常数、 τ'_m , τ'_{2m} , λ_m , λ_{2m} は次元のない未定常数、 n は正の整数である。さて①部材の上面に載る単位面積当たりの荷重 p_0 を $p_0 = p f_n \sin \xi_m$ (f_n は次元のない常数) とし、(2)式で与えられる接合面の応力を既知と考えれば、各構成部材の変形および応力は、部材の釣合式から容易に算定できるから、これらを接合面において成立すべき連続条件に代入して逆に(2)式の4つの未定常数を決定すれば、重ねバリの曲げ問題が解けたことになる。なおここにおいて先の荷重が荷重のフーリエ級数展開の n 項に相当すると考えれば、かくして得られた解はまた重ねバリの級数解の n 項であると解釈することができよう。従って、一般的荷重にたいする解とするためには n にかんする総和記号を付けて考えれば良いことになる。

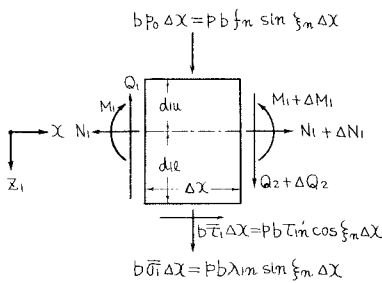


図-2

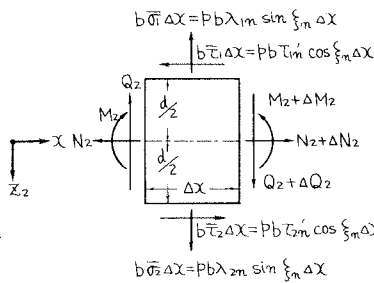


図-3

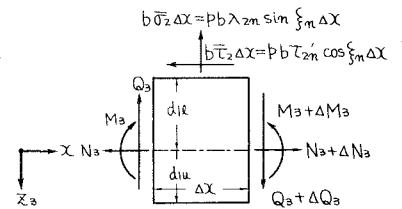


図-4

構成部材に働く軸方向力、せん断力および曲げモーメントを各 N , Q および M とすれば、①部材の Δx で隔てられた微小要素に働く力は、図-2に示す通りであるから、図を参照して釣合式を求め、境界条件を考えて積分すれば、変形および応力式として次式が得られる。

$$w_1 = -\frac{Pb}{E_w} \left(\frac{L_x}{n\pi} \right)^4 \left(\frac{n\pi d_{1l}}{L_x} \tau'_m - \lambda_m - f_n \right) \sin \xi_m, \quad \sigma_1 \Big|_{z_1 = d_{1l}} = -Pb \left(\frac{L_x}{n\pi} \right) \left\{ \frac{\tau'_m}{A_1} + \frac{d_{1l}}{J_1} \frac{L_x}{n\pi} \left(\frac{n\pi d_{1l}}{L_x} \tau'_m - \lambda_m - f_n \right) \right\} \sin \xi_m \quad (3)$$

同様に図-3を参照して②部材の釣合式を求め、境界条件を考慮して積分すれば、変形および応力式として

$$w_2 = -\frac{Pb}{E_w J_2} \left(\frac{dx}{\pi} \right)^4 \left(\frac{\pi d_2}{2 dx} (z_m' + z_m') + (\lambda_{1m} - \lambda_{2m}) \right) \sin \xi_m, \quad \sigma_2 \Big|_{z_2 = \frac{d_2}{2}} = Pb \left(\frac{dx}{\pi} \right) \left\{ \frac{(z_m' - z_{2m})}{A_2} + \frac{d_2}{2 J_2} \frac{dx}{\pi} \left(\frac{\pi d_2}{2 dx} (z_m' + z_m') + (\lambda_{1m} - \lambda_{2m}) \right) \right\} \sin \xi_m \quad (4)$$

また③部材においては図-4を参照して釣合式を求め、さらに積分して

$$w_3 = -\frac{Pb}{E_w J_1} \left(\frac{dx}{\pi} \right)^4 \left(\frac{\pi d_1}{2 dx} (z_m' + \lambda_{2m}) \right) \sin \xi_m, \quad \sigma_3 \Big|_{z_3 = -d_1} = Pb \left(\frac{dx}{\pi} \right) \left\{ \frac{z_m'}{A_1} + \frac{d_1}{J_1} \frac{dx}{\pi} \left(\frac{\pi d_1}{2 dx} (z_m' + \lambda_{2m}) \right) \right\} \sin \xi_m \quad (5)$$

接合面の連続性は、(1)式と各構成部材のたわみが等しいこととによって保たれるから、これらが連続条件を構成することになる。まず(1)式を応力の関係に直せば

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{R}{E_w} \left(\sigma_2 \Big|_{z_2 = -\frac{d_2}{2}} - \sigma_1 \Big|_{z_1 = d_1} \right), \quad \frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{R}{E_w} \left(\sigma_3 \Big|_{z_3 = -d_1} - \sigma_2 \Big|_{z_2 = \frac{d_2}{2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

一方たわみが等しいことから $w_1 = w_2 = w_3$

(6)式に(2), (3), (4)および(5)式を代入し、さらに記号

$$\left. \begin{aligned} z_{1m} = \frac{\pi \pi d_2}{dx} z_m', \quad z_{2m} = \frac{\pi \pi d_2}{dx} z_m', \quad R_w = \frac{bR}{E_w}, \quad i_m = \frac{\pi^2 \pi^2 A_1}{dx^2}, \quad g_1 = \frac{d_2^2 A_1}{J_1}, \quad g_2 = \frac{d_2^2 A_1}{J_2} \\ j_1 = \frac{b d_2^3}{J_1}, \quad j_2 = \frac{b d_2^3}{J_2}, \quad \mu_1 = \frac{d_1}{d_2}, \quad \mu_2 = \frac{d_2 u}{d_2}, \quad a = \frac{A_1}{A_2}, \quad \nu = \frac{d_1}{d_2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

を使用して簡略化すれば、(6)式は次の関係式に変形される。

$$\left. \begin{aligned} -2 i_m z_{1m} = R_w \{ 2 z_{1m} + 2 \mu_1 g_1 (\mu_1 z_{1m} - \lambda_{1m} - f_m) + g_2 (z_{1m} + 2 \lambda_{1m} + f_m) \} \\ j_1 (\mu_1 z_{1m} - \lambda_{1m} - f_m) = j_2 (z_{1m} + 2 \lambda_{1m} + f_m), \quad z_{1m} = z_{2m}, \quad \lambda_{1m} + \lambda_{2m} + f_m = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

これを連立方程式として解いて z_{1m} , z_{2m} , λ_{1m} および λ_{2m} が決定される。

一方二尺重のバリーにおいては、連続条件は(6)式を参照して

$$\frac{d\bar{v}}{dx} = \frac{R}{E_w} \left(\sigma_2 \Big|_{z_2 = -d_{2u}} - \sigma_1 \Big|_{z_1 = d_{1l}} \right), \quad w_1 = w_2 \quad (6')$$

で表わされるから、これを(2)および(3)式ならびに(4)式で $z_{2m}' = \lambda_{2m} = 0$ および $\frac{d_2}{2}$ の代りに d_{2u} と置いた関係式を代入し、さらに(7)式の記号を用いれば次の条件方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -i_m z_{1m} = R_w \{ (1+a) z_{1m} + \mu_1 g_1 (\mu_1 z_{1m} - \lambda_{1m} - f_m) + \mu_2 g_2 (\mu_2 z_{1m} + \lambda_{1m}) \} \\ j_1 (\mu_1 z_{1m} - \lambda_{1m} - f_m) = j_2 (\mu_2 z_{1m} + \lambda_{1m}) \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

これを解いて z_{1m} および λ_{1m} が決定される。

さて三尺重のバリーのたわみ w として(4)式の w_2 をとり、(7)式および(8)式の解を用いて変形すれば

$$w = w_2 = -\frac{Pb}{E_w J_2} \left(\frac{dx}{\pi} \right)^4 \frac{2 j_1 (i_m + R_w) f_m}{2 (i_m + R_w) (j_1 + 2 j_2) + R_w (1 + 2 \mu_1) (g_2 j_1 + 2 \mu_1 g_1 j_2)} \sin \xi_m$$

また J_0 をもって完全合成の重のバリーの総断面にかんする断面二次モーメントを表わさしめれば、 J_0 は $J_0 = \frac{b}{12} (d_2 + 2 d_1)^3 = \frac{b}{12} (1 + 2 \nu)^3 J_2$ であるから

$$\Psi_m = \frac{12 (i_m + R_w) (j_1 + 2 j_2) + 6 R_w (1 + 2 \mu_1) (g_2 j_1 + 2 \mu_1 g_1 j_2)}{j_1 j_2 (i_m + R_w) (1 + 2 \nu)^3} \quad (9)$$

と置けば上のたわみ w は

$$w = -\frac{Pb}{E_w (\Psi_m J_0)} \left(\frac{dx}{\pi} \right)^4 f_m \sin \xi_m \quad (10)$$

他方重ねバリのたわみを初等ハリ理論におけると同様に求めるためには、単一材における断面二次モーメントに相当する量を考えれば良い。そこでこの量を単一材における同じく重ねバリの断面二次モーメントと呼ぶことにすれば、三尺重ねバリの断面二次モーメント J は、 J_0 を単位として $J=\Psi J_0$ で表わされる。ここに Ψ は、重ねバリの断面二次モーメントが完全合成の重ねバリのそれから減少する割合を示す係数で、普通重ねバリの断面二次モーメントの効率と呼ばれる。すると桁の単位長さ当たり $Pbf_m \sin \xi_m$ なる荷重による重ねバリのたわみは

$$w = \frac{Pb}{E_w J} \left(\frac{b_2}{n\pi} \right)^4 \int_m \sin \xi_m = \frac{Pb}{E_w (\Psi J_0)} \left(\frac{b_2}{n\pi} \right)^4 \int_m \sin \xi_m \quad (11)$$

ハリのたわみは、荷重のフーリエ級数展開の初項に対応するたわみの項だけとっても十分良い近似値が得られると考えられるから、(10)および(11)式で初項のみとすることにすれば、両者のたわみは等しいと置けるから、三尺重ねバリの断面二次モーメントの効率として次式を用いることができる。

$$\Psi = \Psi_1 = \frac{12 \{ (i_1 + Kw)(j_1 + 2j_2) + 6Kw(1+2\mu_1)(g_2 j_1 + 2\mu_1 g_1 j_2) \}}{d_1 j_2 (i_1 + Kw)(1+2\nu)^3} \quad (12)$$

また三尺重ねバリにおけると全く同様な操作を行なうことによつて二尺重ねバリの効率は次式のごとく書き表わされる。

$$\Psi = \frac{12 \{ \{ (i_1 + Kw(1+\alpha)) \} (j_1 + j_2) + Kw(\mu_1 + \mu_2)(\mu_1 g_1 j_2 + \mu_2 g_2 j_1) \}}{d_1 j_2 \{ (i_1 + Kw(1+\alpha)) \} (1+\nu)^3} \quad (12')$$

なお構成部材の総断面が有効であるとして求めた効率を Ψ_g とすれば、計算式はやや簡略化されて

三尺重ねバリ	二尺重ねバリ
$\Psi_g = \frac{(i_1 + Kw)(1+2\nu^3) + 6Kw\nu(1+\nu)^2}{(i_1 + Kw)(1+2\nu)^3}$	$\Psi_g = \frac{(i_1 + Kw + Kw\nu)(1+\nu^3) + 3Kw\nu(1+\nu)^2}{(i_1 + Kw + Kw\nu)(1+\nu)^3} \quad (13)$

特に $d_1 = d_2$ ならば、(13)式はさらに簡略化されて

三尺重ねバリ	二尺重ねバリ
$\Psi_g = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \frac{Kw}{i_1 + Kw}$	$\Psi_g = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{Kw}{i_1 + 2Kw} \quad (13')$

これら効率の理論式を用いるならば、たわみはもちろん応力も初等ハリ理論に準じて計算することができる。しかしこれら計算式は、効率をはじめ近似式として与えられるから、既にこの種の理論の精度が確かめられているとはいえず、ここにおいても計算式の精度とその利用法を確認するのが妥当のように思われる。そこで実験結果と比較して種々考察するとともに合成効果が何によつて支配されるか検討したい。

参 考 文 献

- 1) 山本 稔 不完全合成桁の曲げ理論, 土木学会論文集第61号, 昭和35年3月