

II-52 曲線橋の載荷試験について

東京大学工学部 正員 工博 平井 敦
 東京大学工学部 正員 東工博 伊藤 学
 東京大学工学部 正員 東工博 島田 静雄
 東京大学大学院 正員 〇 深澤 泰晴

1. まえがき

曲線橋架設の必要性が高まるにつれて、曲線橋に関する研究も次第に活潑となり、この数年来多くの研究成果が報告されている。しかしそれはまだ構造力学的研究段階にあり、橋梁工学的な基本性質とえも充分に解明されているとは云えず、多くの問題点が残されており、心ある設計者は不安につきまといわれ、枕を高くしてねむることが出来ないというのが現状ではないかと思われる。

このような事情を顧慮して、曲線橋の基本的性質を究明すると共に設計に対して一つの合理的な指標を与えることを目的とし、実物に準ずる大型モデルにより載荷実験を行った。次の四つに要約される研究対象に対応して実験は行われた。

- (1) 曲線形箱形閉断面の応力分布に関する研究
- (2) 一本主桁の箱形曲線橋の曲り梁としての諸性情に関する研究
- (3) 箱形格子曲線橋の格子作用の特異性に関する研究
- (4) 箱形格子曲線橋の破壊に到るまで、並びに破壊時における挙動に関する研究

実験についての詳細、並びにその結果についての報告は講演会当日行うことにして、以下格子曲線橋の合理的と思われる一解法について簡単に述べることにする。

曲り梁特有の捩れ撓み変形に伴う応力の集中化を軽減させるには、捩れ剛性の極めて大きい箱形断面を主桁に採用するのが至当であるが、従来の設計方法¹⁾はいづれもこの主桁の捩れ剛性を考えていないという欠点がある。また逆に曲げ捩れ剛性に比して捩れ剛性の小さい工桁系の断面を用いた場合には、曲げ捩れモーメント（I桁ではフランジ面内曲げモーメント）による垂直応力が卓越することを強調に注意と喚起したい。従ってこれを考慮しないと重大な危険を犯す場合も考えられる。然るに、フーリエ級数を用いて、直線格子桁における“Kempの方法”²⁾を曲り梁に適用すると主桁の捩れ剛性並びに曲げ捩れ剛性を共に考慮した合理的な格子計算が行いうる。

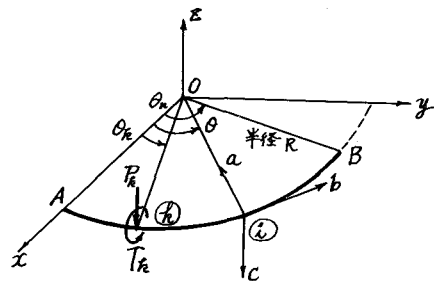


図-1

2. 曲り梁の基本的諸量のフーリエ級数表示

図-1に示すような円形曲り梁ABについては、既に知られるように^{2), 3)} 微小部分の力の釣り合い、及び変形前後の曲率、捩り率の変化量と断面力との関係から(1)で示されるような諸式がえられる。記号の説明を行う： a, b, c は図-1に示すように断面の主軸およ

が橋軸接線方向を軸とする動座標系。 $M^j = (j = a, b, c)$ 断面力で j 軸に関する曲げモーメント (捩りモーメント)。 $S^c =$ 断面力で c 軸方向のせん断力。 $\varphi =$ 見かけの捩り角。 $w =$ 鉛直方向の撓み。 $p, t =$ 外力で各 n 鉛直分布荷重, 捩りモーメント分布荷重。 $EI_a, GJ, EC_w = a$ 軸に関する曲げ剛性, 捩り剛性, 曲げ捩り剛性。 他の幾何学的諸量の記号は図-1中に示すとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 M^a}{d\theta^2} + M^a &= -R^2 p - R t \\ \frac{EC_w}{R^3} \cdot \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} - \left(\frac{GJ}{R} - \frac{EC_w}{R^3} \right) \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} - \frac{GJ}{R} \varphi &= \left(1 + \frac{GJ}{EI_a} + \frac{C_w}{R^2 I_a} \right) M^a + \left(1 + \frac{C_w}{R^2 I_a} \right) R t + \frac{C_w}{R^2 I_a} R^2 p \\ \frac{d^2 w}{d\theta^2} &= -\frac{R^2 M^a}{EI_a} - R \varphi, \quad \frac{dM^a}{d\theta} = M^b + R S^c \quad \text{等} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(i) の諸式により求むべき諸量とフーリエ級数を用いて解き, 更に梁を n 等分して三角函数の週期性を利用して表わす。こゝには格子桁の解法に必要なものだけをあげる。式中の φ^P, w^P は左端に作用する鉛直集中荷重 P_L による i 点の捩り角, 撓みであり, φ^T, w^T は右端に作用する集中捩りモーメント荷重 T_L による捩り角, 撓みである。

(i). $GJ \neq 0, EC_w \neq 0$ の一般の場合

$$\left. \begin{aligned} \varphi^P &= \frac{2P_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n}, \quad w^P = \frac{2P_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^3 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n} \\ \varphi^T &= \frac{2T_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n}, \quad w^T = \frac{2T_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) R^2 \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(ii). $GJ \neq 0, EC_w = 0$ の特殊な場合

$$\left. \begin{aligned} \varphi^P &= \frac{2P_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{1}{EI_a} + \frac{1}{GJ} \right) \alpha_j \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n}, \quad w^P = \frac{2P_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^3 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{\varepsilon_j}{GJ} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n} \\ \varphi^T &= \frac{2T_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{\rho_j}{GJ} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n}, \quad w^T = \frac{2T_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{1}{EI_a} + \frac{1}{GJ} \right) \alpha_j \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(iii). $GJ = 0, EC_w \neq 0$ の特殊な場合

$$\left. \begin{aligned} \varphi^P &= \frac{2P_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \varepsilon_j}{EC_w} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n}, \quad w^P = \frac{2P_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^3 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \kappa_j}{EC_w} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n} \\ \varphi^T &= \frac{2T_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R \left(\frac{1}{EI_a} + \frac{R^2}{EC_w} \right) \alpha_j \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n}, \quad w^T = \frac{2T_L}{n} \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \varepsilon_j}{EC_w} \right) \sin \frac{j\pi k}{n} \sin \frac{j\pi i}{n} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上式中の $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, \varepsilon_j, \rho_j, \kappa_j$ は次のような無限級数として表わされるものである。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= \left(\frac{n}{\pi} \right)^4 \nu^3 \left\{ \frac{1}{[j^2 - (\theta/n)^2]^2} + \frac{1}{[(2n-j)^2 - (\theta/n)^2]^2} + \frac{1}{[(2n+j)^2 - (\theta/n)^2]^2} + \frac{1}{[(4n-j)^2 - (\theta/n)^2]^2} + \dots \right\} \\ \beta_j &= \left(\frac{n}{\pi} \right)^6 \nu^5 \left\{ \frac{1}{[j^2 - (\theta/n)^2]^2 [j^2 + \mu^2 (\theta/n)^2]} + \frac{1}{[(2n-j)^2 - (\theta/n)^2]^2 [(2n-j)^2 + \mu^2 (\theta/n)^2]} + \dots \right\} \\ \gamma_j &= \left(\frac{n}{\pi} \right)^8 \nu^7 \left\{ \frac{1}{[j^2 - (\theta/n)^2]^2 [j^2 + \mu^2 (\theta/n)^2]^2} + \frac{1}{[(2n-j)^2 - (\theta/n)^2]^2 [(2n-j)^2 + \mu^2 (\theta/n)^2]^2 (2n-j)^2} + \dots \right\} \\ \delta_j &= \left(\frac{n}{\pi} \right)^4 \nu^3 \left\{ \frac{j^2}{[j^2 - (\theta/n)^2]^3 [j^2 + \mu^2 (\theta/n)^2]} + \frac{(2n-j)^2}{[(2n-j)^2 - (\theta/n)^2]^3 [(2n-j)^2 + \mu^2 (\theta/n)^2]} + \dots \right\} \\ \varepsilon_j &= \left(\frac{n}{\pi} \right)^6 \nu^5 \left\{ \frac{1}{[j^2 - (\theta/n)^2]^2 j^2} + \frac{1}{[(2n-j)^2 - (\theta/n)^2]^2 (2n-j)^2} + \frac{1}{[(2n+j)^2 - (\theta/n)^2]^2 (2n+j)^2} + \dots \right\} \\ \rho_j &= \left(\frac{n}{\pi} \right)^2 \nu \left\{ \frac{j^2}{[j^2 - (\theta/n)^2]^2} + \frac{(2n-j)^2}{[(2n-j)^2 - (\theta/n)^2]^2} + \frac{(2n+j)^2}{[(2n+j)^2 - (\theta/n)^2]^2} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\kappa_j = \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 \nu^2 \left\{ \frac{1}{[j^2 - (0_n/n)^2]^2 j^4} + \frac{1}{[(2n-j)^2 - (0_n/n)^2]^2 (2n-j)^4} + \frac{1}{[(2n+j)^2 - (0_n/n)^2]^2 (2n+j)^4} + \dots \right\}$$

こゝに上式中 $\nu = 0_n/n$, $e = 0_k/\nu$, $i = 0/\nu$, $\mu^2 = 4JR^2/EC_w$

これらの無限級数は P_j を除いて他は全て非常に収斂がよく最初の数項のみを計算すれば充分な精度が得られる。一方 P_j は収斂は悪いが $(0_n/n)^2$ の値が $(2n \pm j)^2$, $(4n \pm j)^2$, ... 等に比して非常に小さいことに注目すると、次に記す既知の級数と比較することにより計算しうる。

$$\frac{\nu}{2(1 - \cos \frac{j\pi}{n})} = \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 \nu \left\{ \frac{1}{j^2} + \frac{1}{(2n-j)^2} + \frac{1}{(2n+j)^2} + \frac{1}{(4n-j)^2} + \dots \right\}$$

即ち P_j の値と上式の値との差は殆んど最初の数項によって生ずるので、この差を計算し、上式の値に加えることにより非常に精度の高い P_j の近似値が求まる。

3. 格子曲線橋の解法

集中荷重 P_k が全ての格子に作用するときは(2)式において、 $P_j = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P_k \sin \frac{j\pi k}{n}$ (6)

とおくと $q^P = \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) P_j \sin \frac{j\pi i}{n}$, $w^P = \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) P_j \sin \frac{j\pi i}{n}$ (7)

また格子力 A_k , 格子モーメント T_k が全ての格子に作用する場合には

$$2\mathcal{U}_j = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} A_k \sin \frac{j\pi k}{n}, \quad \mathcal{Z}_j = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T_k \sin \frac{j\pi k}{n} \quad (8)$$

とおくと $q^P = \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) \mathcal{U}_j \sin \frac{j\pi i}{n}$, $w^P = \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) \mathcal{U}_j \sin \frac{j\pi i}{n}$
 $q^T = \sum_{j=1}^{n-1} R \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) \mathcal{Z}_j \sin \frac{j\pi i}{n}$, $w^T = \sum_{j=1}^{n-1} R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right) \mathcal{Z}_j \sin \frac{j\pi i}{n}$ (9)

逆に、 $\mathcal{U}_j$, $\mathcal{Z}_j$ が求められると、次式によって各格子力 A_k , 格子モーメント T_k が計算出来ることが証明される。⁵⁾ $A_k = \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{U}_j \sin \frac{j\pi k}{n}$, $T_k = \sum_{j=1}^{n-1} \mathcal{Z}_j \sin \frac{j\pi k}{n}$ (10)

こゝでバネ常数の概念を導入する。直線梁の場合と異なるのは、鉛直荷重による廻転バネ常数、撓れモーメントに対する撓みバネ常数が存在することである。単位鉛直荷重及び撓れモーメント荷重による廻転角及び撓みを各々、 C_j^{PP} , C_j^{WP} , C_j^{PT} , C_j^{WT} とすると次のように書ける (C_j はバネ常数の逆数に当る)。

$$C_j^{PP} = R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right), \quad C_j^{WP} = R^3 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right)$$

$$C_j^{PT} = R \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right), \quad C_j^{WT} = R^2 \left(\frac{\alpha_j}{EI_a} + \frac{R^2 \beta_j}{EC_w} \right)$$

こゝにマックスウェルの相反則により当然 $C_j^{PP} = C_j^{WT}$ が成り立っている。

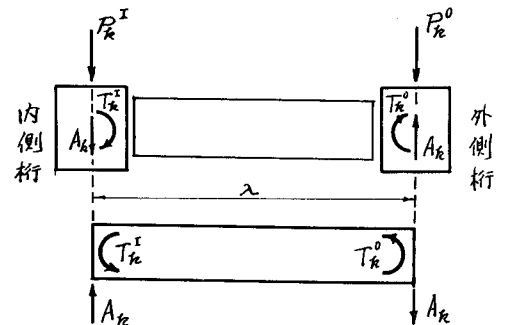


図-2

以上記した基本的事項をもとにして、任意数の主桁を有する曲線格子橋を解くことが出来る。以下二本主桁の場合についてこゝでは説明する。図-2に示すような横桁基本系の

力のび変位の釣り合い条件に(7), (9), (11)式を考慮して次のようなアフィン荷重 u_j , $\bar{u}_j$ を求める基本連立方程式がえられる。外側桁と内側桁の諸量はサフィクス 0, I によって区別する。

$$\left. \begin{aligned} (C_j^{0PP} + C_j^{I0P} + \lambda C_j^{I0T}) u_j - (C_j^{0PT} + C_j^{I0T}) \bar{u}_j &= C_j^{0PP} P_j^0 - C_j^{I0P} P_j^I \\ (C_j^{0WP} + C_j^{I0P} - \lambda C_j^{0PT} + \lambda C_j^{I0T}) u_j - (C_j^{0WT} + C_j^{I0T} - \lambda C_j^{0PT}) \bar{u}_j &= (C_j^{0WP} - \lambda C_j^{0PT}) P_j^0 - C_j^{I0P} P_j^I \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

計算に便利のために書きかえて

$$u_j = \frac{B_1 \cdot H_2 - B_2 \cdot W_1}{H_2 \cdot W_1 - H_1 \cdot W_2} \quad \bar{u}_j = \frac{H_1 \cdot B_2 - B_1 \cdot W_2}{H_2 \cdot W_1 - H_1 \cdot W_2} \quad (13)$$

こゝに, $H_1 = C_j^{0PT} + C_j^{I0P} + \lambda C_j^{I0T}$, $H_2 = C_j^{0PT} + C_j^{I0T}$, $B_1 = C_j^{0PP} P_j^0 - C_j^{I0P} P_j^I$
 $W_1 = C_j^{0WP} + C_j^{I0P} - \lambda C_j^{0PT} + \lambda C_j^{I0T}$, $W_2 = C_j^{0WT} + C_j^{I0T} - \lambda C_j^{0PT}$, $B_2 = (C_j^{0WP} - \lambda C_j^{0PT}) P_j^0 - C_j^{I0P} P_j^I$
 (13)式から求めた u_j , $\bar{u}_j$ を(10)式に代入し全ての格子の格子力 A_k 及び格子モーメント T_k^I が求まり更に T_k^I は次式による。

$$T_k^I = \lambda A_k - T_k^0 \quad (14)$$

4. 数値計算の一例

実験に用いた箱桁格子曲線橋の計算例を記す。単位は ton-meter。

断面常数:

$$EI_a^0 = EI_a^I = 1.083 \times 10^4 \text{ t-m}^2$$

$$GJ^0 = GJ^I = 0.5870 \times 10^4 \text{ t-m}^2$$

$$EC_w = 0$$

幾何学的条件

$$R^0 = 7.2 \text{ m}, R^I = 5.8 \text{ m}$$

$$\lambda = 1.4 \text{ m}$$

$$\theta_n = 80^\circ$$

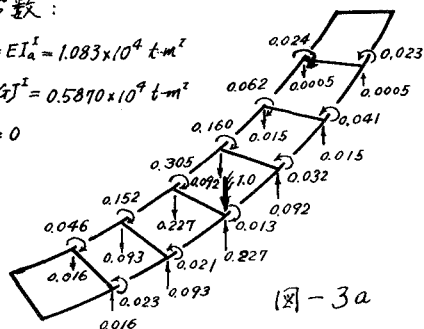


図-3a

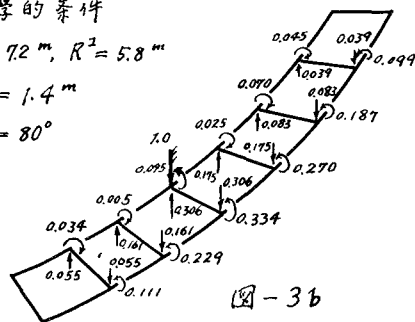


図-3b

j	α_j	E_j	P_j	C_j^{0WP}	$C_j^{0WT} = C_j^{0PP}$	C_j^{0PT}	C_j^{I0P}	$C_j^{I0T} = C_j^{I0P}$	C_j^{I0T}
1	304.4×10^3	60.19×10^3	1555.1×10^3	14.32×10^3	4.146×10^3	2.110×10^3	7.485×10^3	2.690×10^3	1.700×10^3
2	13.57°	0.6702°	291.3°	0.510°	0.1848°	0.3663°	0.2667°	0.1199°	0.295°
3	2.538°	0.0556°	133.3°	0.0910°	0.0346°	0.1652°	0.0476°	0.0224°	0.133°
4	0.804°	0.00973°	83.2°	0.0283°	0.0110°	0.1026°	0.0148°	0.00711°	0.0826°
5	0.349°	0.00260°	62.5°	0.0122°	0.00475°	0.0769°	0.00637°	0.00308°	0.0620°
6	0.202°	0.00104°	52.9°	0.00703°	0.00275°	0.0650°	0.00307°	0.00179°	0.0523°

計算結果を示す図-3a, b によつて, 曲線格子橋の格子作用の特異性の一端がうかがえる。しかしこれは, 断面常数如何によつてはこれと著しく異, た傾向のものとなり, 特に GJ/EC_w の値が格子特性を支配する重要なパラメータであることがわかつている。その詳細等については機会を改めて発表する予定である。

1). 例えは H. Gottfeldt, "Die Berechnung räumlich gekrümmter Stahlbrücken". Bautechnik Heft 8, 1933. 2) W. Kloppe, "Ein neues Verfahren der Trägereinstellung". Beton- und Stahlbetonbau. Heft 1, 1956. 3) 平井・倉西, "曲線橋の理論" 土木技術 第13巻7号, 1958. 4) 近藤・深沢, "曲線形箱桁橋の解法" 山梨大学研究報告, 第11号 1960. 5) 例えは 田原神原・香樹, 道路 32年9月号.