

II-46 Netz-Werke 床版の有効中について

室蘭工業大学教授 工博 能町 純雄
 函館トク株式会社 阿部 俊視
 北海道開発コンサルタントK.K. 青木 弘

1. はしがき

正三角形 Netz が順序正しく数多く集合した Netz-Werke が力学的に等方質の等方性板と置き換えられることが K.Klöppel 及び R.Schardt の理論などによつて証明されている。

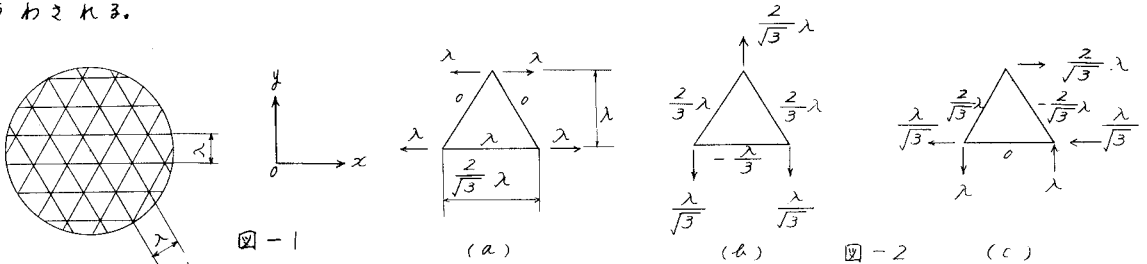
これによれば、Netz の要素が正三角形の場合は平面応力状態に於ても、平板曲げの状態に於ても等方性板と等価な力学的挙動となすことがわかる。従つて正三角形 Netz-Werke を床版とした合成桁構造は Netz-Werke の床版が上フランジとして有効に協力する筈である。

ここでは、この構造物の合成協力幅について検討するものである。勿論 Netz-Werke については工作上工数を始めとして多々問題はあるが、上部舗装を省略し得る場合を考えれば、橋体重量を著しく軽減することが出来るので、駆動装置が橋体重量に左右される可動橋などにおいては、この種の構造が経済的にも成立する可能性があらまと思われる。

2. 正三角形 Netz の力学的性質

1) 平面応力について

図の様な正三角網の平面応力は三角形要素の単位荷重による歪みを考えて次のようにならわされる。



λ ; 平行な線の間隔。

F ; 網を作る部材の断面積

x, y 方向の直応力を σ_x, σ_y , 剪断応力を τ_{xy} , 換算厚を t , とおけば:

(a) $t\sigma_x = 1$	$\epsilon_x = \frac{\lambda}{EF}$	(b) $t\sigma_x = 0$	$\epsilon_x = -\frac{\lambda}{3EI}$	(c) $t\sigma_x = 0$	$\epsilon_x = 0$
$t\sigma_y = 0$	$\epsilon_y = -\frac{\lambda}{3EI}$	$t\sigma_y = 1$	$\epsilon_y = \frac{\lambda}{EI}$	$t\sigma_y = 0$	$\epsilon_y = 0$
$t\tau_{xy} = 0$	$\epsilon_{xy} = 0$	$t\tau_{xy} = 0$	$\epsilon_{xy} = 0$	$t\tau_{xy} = 1$	$\epsilon_{xy} = \frac{2\lambda}{3EF}$

故に (1) 式が成立する。この場合、ポアソンズ比は、構造による定数 ν 材料に因係なく $\frac{1}{3}$ であり、換算厚を $t = F/\lambda$ とすると、

(1) 式は 次の従来の形を満足する。

従つて、厚さ t の鋼板と同じ効果がある。

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{\lambda t}{EF} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$E\epsilon_x = (\sigma_x - \frac{1}{3}\sigma_y), \quad E\epsilon_y = (\sigma_y - \frac{1}{3}\sigma_x), \quad 2E\epsilon_{xy} = \tau_{xy} \quad (2)$$

又、よく知られているように次の関係がある。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

$$\text{力の釣合は} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\text{従って} \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

とすれば、 Φ は (4) 式を満足する。(2)(3) 式より (6) 式が成立する。 $\Delta^2 \Phi = 0$ (6)

$$\text{変位は} \quad E u = \int \Delta^2 \Phi dx - \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (7), \quad E v = \int \Delta^2 \Phi dy - \frac{4}{3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (8)$$

2) 平板としての曲げについて

x 軸と 60° に交る線材について、曲げモーメント M_1 、捩りモーメントと T_1 、同じく 120° に交る線材について、曲げモーメントを M_2 、捩りモーメントを T_2 、平行な線材について、曲げモーメントを M_3 、捩りモーメントを T_3 とし、この線材の曲げ剛性を、捩り剛性を EI , GJ とすれば

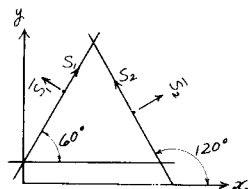


図-3.

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} M_1 \} &= -EI \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ M_2 \} &= -EI \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{3}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \\ T_1 \} &= -GJ \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \\ T_2 \} &= -GJ \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \\ M_3 &= -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad T_3 = -GJ \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (9) \end{aligned} \right\}$$

x 方向の単位長さ当たりの曲げモーメントを m_x , y 方向の単位長さ当たりの曲げモーメントを m_y 、捩れモーメントを m_{xy} とすれば:

$$\lambda m_x = -EI \left(\frac{9}{8} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - GJ \frac{3}{8} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (10)$$

$$\lambda m_y = -EI \left(\frac{9}{8} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - GJ \frac{3}{8} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (11)$$

$$\lambda m_{xy} = \lambda m_{yx} = - \left(\frac{3}{4} EI + \frac{6}{8} GJ \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \quad (12)$$

とすると、一般に曲げ剛性を N とすれば:

$$m_x = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad m_y = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad m_{xy} = -N(\nu - \nu') \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (13)$$

とかけるから、 $\lambda N = \frac{9}{8} EI + \frac{3}{8} GJ$, $\lambda \nu N = \frac{3}{8} EI - \frac{3}{8} GJ$.

$$\text{釣合の方程式は} \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \quad (14)$$

(10), (11), (12), & (14) 式より $\Delta^2 u = \frac{P}{\frac{3}{\theta}(3B+D)}$ (15)

但し $B = \frac{EI}{\lambda}$, $D = \frac{GJ}{\lambda}$

(15) 式より曲げの問題は総て解決出来る。

3. 正三角形 Netz の有効中

図-4 のように、床版と Girder とを分けず。

Girder 部分のみを考えれば、図-5 より次の関係が得られる。

$$S = -\frac{dN}{dx}, \quad P - q = -\frac{dQ}{dx}, \quad Sh = \frac{dM}{dx} - Q$$

P ; 荷重

q ; Netz の橋軸と直角方向の曲りによる Shear

フックの法則から

$$N = EAu_0', \quad M = -EIu'' \quad (17)$$

幾何学的関係より、

$$u = h w' + u_0 \quad (18)$$

但し E = 弾性係数

A = 桁の断面積

I = 桁の重心軸に關する慣性モーメント

(16), (17), (18) 式より, $S = -EA(u'' - h w''')$,

$$P - q - S \cdot h = EI w'''' \quad (19)$$

床版の剛性が桁の剛性に比べて小さい時は q が無視出来るから、

$$S = -EA(u'' - h w'''), \quad P - S \cdot h = EI w'''' \quad (20)$$

今, $S = \sum_m S_m \cos \frac{m\pi}{a} x$, $P = \sum_m P_m \sin \frac{m\pi}{a} x$, $u = \sum_m u_m \cos \frac{m\pi}{a} x$ とおいて、

(20) 式より, w を消去すると、

$$h \cdot A P_m + S_m \left(\frac{m\pi}{a} \right) (h^2 A + I) = E A I u_m \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \quad (21)$$

次に Flg's (Netz 床版) について考へると、図-6 の荷重状態では、

桁を中心として、左右対称の変形である。その応力函数 至は、

$$\left. \begin{array}{l} \text{境界条件} \quad y=0 \quad \sigma_y=0 \quad \text{と} \quad \tau_{xy}=0 \\ \quad \quad \quad y=h \quad \tau_{xy}=\frac{S}{2} \\ \quad \quad \quad y \text{ 方向変位} \quad v=0 \end{array} \right\} \quad (22)$$

又、床版と Girder の連続の条件式(21)から

$$\begin{aligned} \text{至} = & \sum_m \sin \frac{m\pi}{a} x \left\{ A m (\pi \beta_m \gamma \operatorname{ch} \pi \beta_m \gamma - sh \pi \beta_m \gamma) \right. \\ & \left. + B m \pi \beta_m \gamma sh \pi \beta_m \gamma \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

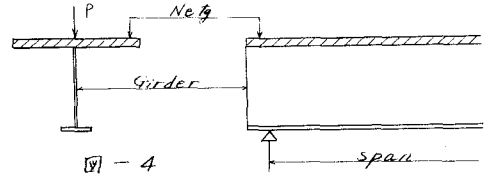


図-4

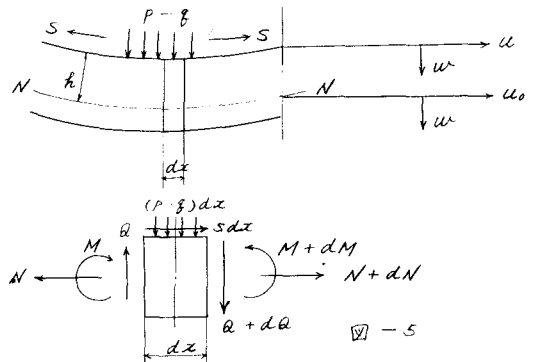
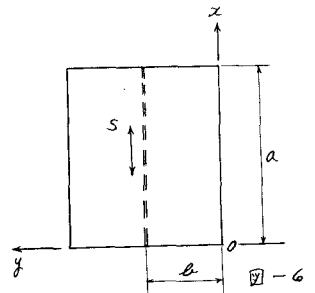
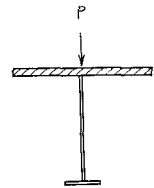


図-5



(23)式中 $\beta_m = \frac{b}{a} m$, $\eta = \frac{y}{b}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ 又 A_m, B_m は積分未知数である。

故に、応力及び変位は、

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{1}{b^2} \sum_m (\pi \beta_m)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \left\{ A_m (\operatorname{sh} \pi \beta_m \eta + \pi \beta_m \eta \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta) \right. \\ \left. + B_m (2 \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta + \pi \beta_m \eta \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta) \right\} \quad (24)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{b^2} \sum_m (\pi \beta_m)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \left\{ A_m (\pi \beta_m \eta \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta - \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta) \right. \\ \left. + B_m \pi \beta_m \eta \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta \right\} \quad (25)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{b^2} \sum_m \pi \beta_m \cos \frac{m\pi}{a} x \left\{ A_m (\pi \beta_m)^2 \eta \cdot \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta \right. \\ \left. + B_m \pi \beta_m (\operatorname{sh} \pi \beta_m \eta + \pi \beta_m \eta \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta) \right\} \quad (26)$$

$$\Delta \Phi = \sum_m \sin \frac{m\pi}{a} x \left\{ A_m (\pi \beta_m)^2 2 \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta + B_m (\pi \beta_m)^2 2 \cdot \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta \right\} \quad (27)$$

$$EU = \frac{1}{b} \sum_m \cos \frac{m\pi}{a} x \left\{ \frac{4}{3} A_m (\pi \beta_m) (\pi \beta_m \eta \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta - \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta) + \frac{4}{3} B_m (\pi \beta_m)^2 \eta \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta - 2 A_m (\pi \beta_m) \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta - 2 B_m (\pi \beta_m) \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta \right\} \quad (28)$$

$$EV = -\frac{1}{b} \sum_m \sin \frac{m\pi}{a} x \left\{ \frac{4}{3} A_m (\pi \beta_m)^2 \eta \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta + \frac{4}{3} B_m \pi \beta_m (\operatorname{sh} \pi \beta_m \eta + \pi \beta_m \eta \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta) \right. \\ \left. + 2 A_m (\pi \beta_m) \operatorname{ch} \pi \beta_m \eta + 2 B_m (\pi \beta_m) \operatorname{sh} \pi \beta_m \eta \right\} \quad (29)$$

$$\therefore \text{に、} S_m = -\frac{t}{b^2} \left\{ A_m (\pi \beta_m) \operatorname{sh} \pi \beta_m + B_m (\pi \beta_m)^2 (\operatorname{sh} \pi \beta_m + \pi \beta_m \operatorname{ch} \pi \beta_m) \right\} \quad (30) \quad \text{である。}$$

従って最終的に、 $\frac{h}{b} A P_m - 2 \frac{t}{b} (\pi \beta_m)^2 \left\{ \frac{h^2}{3} A + I \right\} \left\{ A_m (\pi \beta_m) \operatorname{sh} \pi \beta_m + B_m (\operatorname{sh} \pi \beta_m + \right.$

$$\left. \pi \beta_m \operatorname{ch} \pi \beta_m) \right\} = \frac{4}{3} \frac{m^2 \pi^2}{a^2 b^2 E} \cdot (\pi \beta_m) E A \cdot I \left\{ A_m (\pi \beta_m) (\pi \beta_m \operatorname{ch} \pi \beta_m - \operatorname{sh} \pi \beta_m \frac{5}{2}) + \right.$$

$$\left. P_m \pi \beta_m (\pi \beta_m \operatorname{sh} \pi \beta_m - \frac{3}{2} \operatorname{ch} \pi \beta_m) \right\} \quad (31) \quad \text{及} \quad v, \quad V(y=b) = 0 \quad \text{より、}$$

$$A_m (\pi \beta_m) \left\{ \pi \beta_m \operatorname{sh} \pi \beta_m + \frac{3}{2} \operatorname{ch} \pi \beta_m \right\} + B_m (\pi \beta_m) \left\{ \frac{5}{2} \operatorname{sh} \pi \beta_m + \pi \beta_m \operatorname{ch} \pi \beta_m \right\} = 0 \quad (32)$$

(31), (32) 式より連立に解いて A_m, B_m を求めた応力状態を直ちに判る。

参考文献; Der Stahlbau 1960 Heft 2 S 33 ~ S 43.