II—44 平板構造の一近似解法について

大阪市立大学 正員 倉田宗章
仝上 正員 ○岡村宏一

1. はしがき　土木構造物において平板構造の占める分野は相当に大きいものであるが、一般に平板問題の解析は往々にして煩雑な計算を伴うことが多く、境界あるいは荷重の条件によっては設計上必要な資料が充分に得られていない感がある。近年電子計算機の発達に伴い、問題によっては計算労力は機械力によって置きかえ得るようになったとは云え複雑な問題に対しては解の精度を落すことなく未知量の元数を減ずる工夫なしには解法としての一層の発展は望み難い。たとえば単一平板の問題だけでなく更に平板と平板、あるいは平板と線材が結合したような一般の構造物を立体的に取扱う場合等がそれであろう。本文においては、この様な目的のための一近似解法を示す。即ち板内においては微分方程式を満足する級数解を使用するが一方境界条件(場合によっては連続条件)の近似的緩和を行うのである。これによって級数の収斂の改良と解を求めるべき連立方程式の元数の著しい減少が得られしかも解の精度は良好であった。

2. 解法　解法の一例を示す。今選んだ未知量として、板の境界に分布して作用する不静定モーメント：M_ξをとろう(Fig.1)。次に境界条件を緩和するためにFig.2に示す様にM_ξをn区間に階段状に変化して分布するn个の平均モーメントに置き換えるものとする。境界上の選ばれた各点($x_1, x_2 \cdots x_n$)には夫々平均モーメント($M_1, M_2 \cdots M_n$)が作用するものとする略近化を行う。今この様に置き換えられたモーメントによって生ずる板のたわみは次式で表わされる。

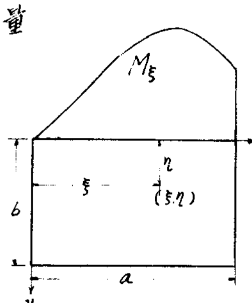


Fig. 1

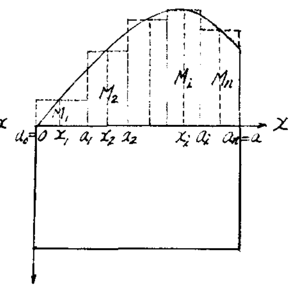


Fig. 2

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} M_i \left(\frac{\partial \bar{w}_1}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} d\xi$$

ただし$\bar{w}_1$は単純支持板内任意点(ξ, η)にUnit loadが作用した場合のたわみである。他の辺にモーメントが作用した場合も同様な手段で求められる。さて境界条件を満足させるには選点法による。即ち選ばれた各点($x_1, x_2 \cdots x_n$)において満足されることを要求すると対応する平均モーメント($M_1, M_2 \cdots M_n$)が求まる。例えばこの辺が固定される場合の板のたわみをwとすれば、

$w = w_1 + w_2$　　ただしw_2は与えられた荷重による単純支持板のたわみ

固定条件は各点x_iにおいて成立ち、例えば $y=0$ 辺が固定される場合は

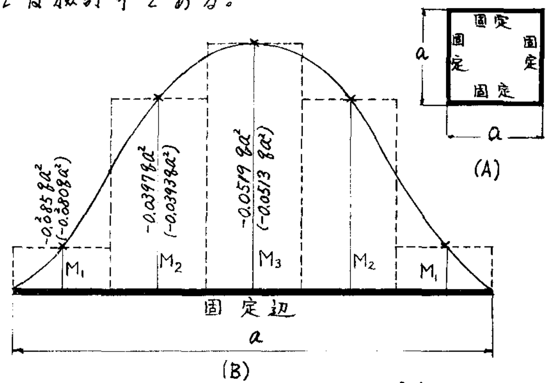
$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0}^{x_i} = 0$　　即ち不静定モーメントM_iを求める連立方程式が得られ各点において求められたM_iの値を結べばM_ξの分布が近似的に得られる。実際にこの様にして求めた固定モーメントの近似的分布は次項計算例にも示す様に例えば等布荷重を受ける周辺固定正方形板では僅かに3元連立方程式を解く事によって得られ正確解との誤差は辺の中央にお

いて1%以内であり充分良好な精度が得られる．一方板内においては境界の略近化の影響は少くなるはずだから通常問題にされる板の中央附近では更に良好な精度が期待出来る．又周辺モーメントM_iは計算を一層簡易にするために必ずしも全辺に亘って分布を仮定しなくても良い場合があろう．例えば周辺固定板の隅角附近のモーメントの様な影響の少いものは省略してもよいと思われるが，これらについては検討中である。

3．計算例

a)等布荷重を受ける周辺固定正方形板

Fig. 3(A)に示すような辺長aの周辺固定正方形板の固定モーメント分布を求めてみよう。この場合図の様に各辺を5等分して平均モーメントを仮定し，又各分割区間の中点で固定条件を満足するものとすれば対称性より未知数M_1, M_2, M_3に対し次の連立方程式を得る．



(　)は正確解

Fig. 3

η ＼ M	M_1	M_2	M_3	$-C_\eta \times (\frac{D\pi^2}{a})$
$\eta=0.1$	$2(\phi_{\xi=0}-\phi_{\xi=0.2})$	$2(\phi_{\xi=0.2}-\phi_{\xi=0.4})$	$\phi_{\xi=0.4}-\phi_{\xi=0.6}$	$-C_{\eta=0.1}\times(〃)$
$\eta=0.3$	〃	〃	〃	$-C_{\eta=0.3}\times(〃)$
$\eta=0.5$	〃	〃	〃	$-C_{\eta=0.5}\times(〃)$

ここでC_ηは荷重項であって等布荷重を受ける単純支持板の各点における撓角である．又各モーメントの係数ϕは境界条件の簡略化のため収斂の速な形になり簡単に計算できる。すなわち

$$\phi=\phi_1+\phi_2+\phi_3$$

$$\phi_1=\sum_{n=1,3,5\cdots}\frac{\pi}{n}\left\{\frac{1}{2}\frac{\tanh\frac{n\pi}{2}\cosh n\pi(\frac{1}{2}-\eta)}{\cosh\frac{n\pi}{2}}-\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\frac{\sinh n\pi(\frac{1}{2}-\eta)}{\cosh\frac{n\pi}{2}}\right\}\cos n\pi\xi,$$

$$\phi_2=\psi_\lambda(\lambda=\xi+\eta)+\psi_\lambda(\lambda=\eta-\xi)\qquad \psi_\lambda=\frac{\pi\lambda}{2}\left[1-\log\frac{\pi\lambda}{2}-\frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1)B_n}{n(2n+1)!}\left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^{2n}-\cdots\right],\ B_n\text{はベルヌーイ数}$$

$$\phi_3=\sum_{m=1,3,5\cdots}\left\{\frac{1}{m^2}\left(\tanh\frac{m\pi}{2}-1\right)+\frac{\pi}{2m}\operatorname{sech}^2\frac{m\pi}{2}\right\}\sin m\pi\eta\cos m\pi\xi.$$

計算された近似値と既知の正確値との比較をFig. 3(B)に示す。

b)等布荷重を受ける三辺固定一辺自由な正方形板

これを正確に解くには非常な手数を要するものである．近似法ではFig. 4に示す様に各辺を5等分して求める．図に示す結果は8元連立方程式を解いて求めたものである．前例仝様に級数の収斂は良好となり比較的容易に計算出来る。図に於て比較に用いた正確解はGoriupp の求めたものであるが精度は非常に良好である。

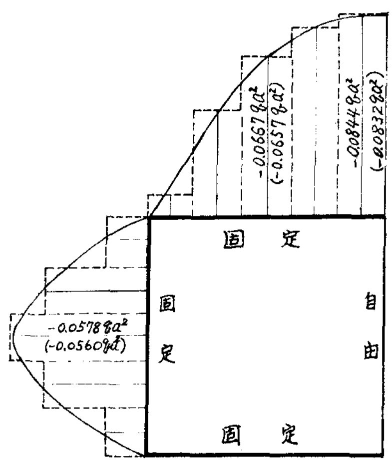


Fig. 4　(　)は正確解