

II-41 極異方性版理論による曲線橋の解法

北海道開発局 正負 竹下 淳

1. はしがき

主桁並列形式の直線橋を直交異方性版とみなして解析する方法は広く一般に行なわれて
いるが、曲った並列主桁を有する曲線橋あるいは曲線版橋を解くにあたっては、これらを
円周方向とそれに直交する半径方向とで異方性版構造とみなして解析することが考えられ
る。このような版を極異方性版と仮称する。

曲線橋では一般に外側桁の曲げモーメントは他に比して大きいので、また曲線半径が小
さい場合は橋面の車道には片勾配をつけるという道路構造上の条件から、外側の桁ほど桁
高を高くすることが多く、従って橋中方向に等断面とはみなされないうちが多いため、こ
の点についても考慮した。

2. 極異方性版理論の概要

極異方性版におけるミズミと応力成分の関係

$$\varepsilon_r = \sigma_r / E_r - \mu_0 \sigma_\theta / E_\theta, \quad \varepsilon_\theta = \sigma_\theta / E_\theta - \mu_r \sigma_r / E_r.$$

を基礎にして、等方性版の場合と全く同様の釣合条件に従って、極異方性版のたわみ面の
微分方程式を誘導することができる。誘導の過程で、版剛度 B_θ, B_r とネジリ剛度 ZH は r
の単調函数として近似的に

$$B_\theta = b_\theta r^m, \quad B_r = b_r r^m, \quad ZH = z_h r^m$$

とおくことにすれば、比例常数 b_θ, b_r, z_h および m の値は最大最小剛度などから決定でき
る。このような仮定に従えば、たわみ面の微分方程式は次のとおりになる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2(1+m) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \left\{ m(1+m+\mu_0) - \beta^2 + 2K\beta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \left\{ m(m-1)\mu_0 + (1-m)\beta^2 + (m-1)2K\beta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \\ + \left\{ m(m-1)\mu_0 + (2-m)\beta^2 + (1-m)2K\beta + \beta^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \frac{1}{r^4} \frac{\partial w}{\partial \theta} = p/B_r \dots \dots \dots (1)$$

ここで、 $\beta = \sqrt{\frac{B_\theta}{B_r}}, \quad K = \frac{H}{\sqrt{B_\theta B_r}}$

断面力および反力は

$$M_r = -B_r \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\}$$

$$M_\theta = -B_\theta \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \mu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\}$$

$$M_{r\theta} = -ZC \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$Q_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta)$$

$$Q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{Z}{r} M_{r\theta}$$

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}$$

$$V_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}$$

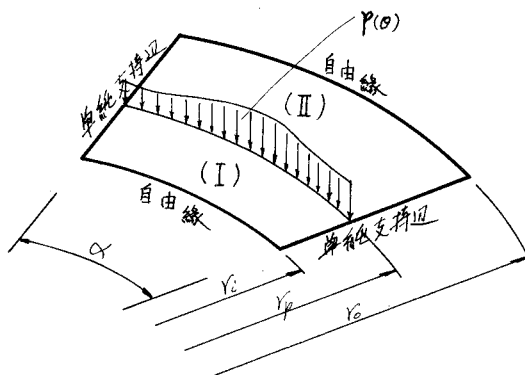


図-1

3. 扇形橋の解

図-1のような場合、線荷重であるから(1)式の右辺は0となり微分方程式の解は、

$\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \lambda_{n3}, \lambda_{n4}$ を 4 次方程式

$$x^4 + 2(m-2)x^3 + \left\{5-\beta^2 + m(m-5+\mu_0) - 2k\beta\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}x^2 + (2-m)\left\{\beta^2-1 + m(1-\mu_0) + 2k\beta\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right\}x - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\left[2\beta^2+2k\beta - m\left\{\beta^2+2k\beta + (1-m)\mu_0\right\} - \beta^2\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2\right] = 0$$

の解として

$$\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n r^{\lambda_{n1}} + B_n r^{\lambda_{n2}} + C_n r^{\lambda_{n3}} + D_n r^{\lambda_{n4}} \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

の形に求められるが、 λ が複素根または等根の場合は、多少の変形が必要である。

等断面 ($m=0$) の場合は次のとおりになる。

$$i) \quad D = \frac{\beta(1-k)}{2} \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta+1}{2} \right)^2 > 0$$

$$\omega = r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n r^{\frac{k}{2}} \cos(\varphi_n \log r) + B_n r^{\frac{k}{2}} \sin(\varphi_n \log r) + C_n r^{-\frac{k}{2}} \cos(\varphi_n \log r) + D_n r^{-\frac{k}{2}} \sin(\varphi_n \log r) \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$ii) \quad D = 0$$

$$\omega = r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n r^{\frac{k}{2}} + B_n r^{\frac{k}{2}} \log r + C_n r^{-\frac{k}{2}} + D_n r^{-\frac{k}{2}} \log r \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$iii) \quad D < 0$$

$$\omega = r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n r^{\frac{k}{2} + \varphi_n} + B_n r^{\frac{k}{2} - \varphi_n} + C_n r^{-\frac{k}{2} + \varphi_n} + D_n r^{-\frac{k}{2} - \varphi_n} \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$\text{上記で} \quad \phi_n = \sqrt{\frac{\beta(1+k)}{2} \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\beta-1}{2} \right)^2}, \quad \varphi_n = \sqrt{\left| \frac{\beta(1-k)}{2} \left(\frac{n\pi}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\beta+1}{2} \right)^2 \right|}$$

複分常数は、線荷重を境界とする領域 I および II で各 4 つ計 8 つあるが、線荷重を $\sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$ で展開すれば、次の 8 つの境界条件から決定される。

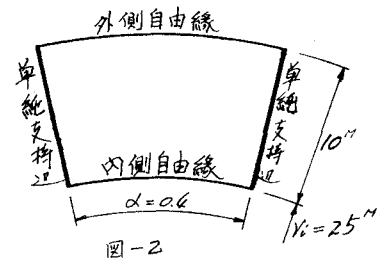
$$r=r_i; \quad M_{rI} = 0, \quad V_{rI} = 0$$

$$r=r_p; \quad \omega_{rI} = \omega_{rII}, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_I = \left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)_{II}$$

$$M_{\theta I} = M_{\theta II}$$

$$Q_{rI} - Q_{rII} = r(\theta) \left(\sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \right)$$

$$r=r_o; \quad M_{rII} = 0, \quad V_{rII} = 0$$



4 数値計算例

図-2 のようなディメンションの曲線橋に等分布荷重 (1 ton/m) を満載した場合のスパン中央における円周方向曲げモーメント M_θ を等断面の場合と、半径方向に漸変断面 ($m=2.9$) を有する場合とについて求めた結果は図-3 のとおりである。

いずれの場合も

$$\beta = 1.686, \quad k = 0, \quad \mu_r = \mu_\theta = 0$$

とした。

