Ⅱ—35　曲線梁の変形の階差式表示

東大工博　島田静雄

1 記号と計算条件

半径Rの円弧の軸線を持つ梁に，円弧を含む面に垂直な荷重と捩りを作用させた場合の応力と変形とを扱う。梁は両端で曲げに対して廻転自由，捩れに対して剛の拘束とする。曲線に沿って計った支間$l=nb$の弧をはさむ角度$\Phi=n\beta$，n等分点（格点）を$0, 1, 2, \cdots\cdots k-1, k, k+1, \cdots\cdots n$，とし，格点での曲げモーメント$M_k$，タワミ$w_k$，見掛けの捩れ角$\theta_k$，格点に作用する垂直荷重$P_k$，トルク$T_k$，梁の曲げ剛性$EJ$，捩れ剛性$KG$，更に曲げ捩れを考えて，曲げ捩れ剛性$EC_w$とする。

2 曲げモーメントの階差式表示

結果だけを示す。

$$\frac{1}{\sin\beta}\left[-M_{k-1}+2M_k\cos\beta-M_{k+1}\right]=P_kR+T_k \qquad \cdots\cdots (1)$$

3 梁が無応力の場合のタワミと捩れ角

$$w_{k-1}-2w_k+w_{k+1}=-2R\theta_k(1-\cos\beta) \qquad \cdots\cdots (2)$$

$$\theta_{k-1}-2\theta_k\cos\beta+\theta_{k+1}=0 \qquad \cdots\cdots (3)$$

4 梁に荷重が作用した場合のタワミと捩れ角の階差式

$$\begin{aligned}\theta_{k-1}-2\theta_k\cos\beta+\theta_{k+1}=&\ \frac{KGR^2}{(EC_w+KGR^2)^2}\left(\frac{\sinh\mu b}{\mu}-R\sin\beta\right)\cdot(T_k+P_kR)\\&+\frac{EC_w+KGR^2+EJR^2}{2EJ(EC_w+KGR^2)}(R\sin\beta-b\cos\beta)\cdot(T_k+P_kR)\\&-\frac{R^3}{EC_w+KGR^2}\left(\frac{\sinh\mu b}{\mu}-R\sin\beta\right)\cdot P_k\\&-\frac{EC_w+KGR^2+EJR^2}{EJ(EC_w+KGR^2)}(b\sin\beta)\cdot M_k\\&+2A_k(\cosh\mu b-\cos\beta)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (4)$$

$$\begin{aligned}R\left[\frac{d^2\psi_{k-1}}{ds^2}-2\frac{d^2\psi_k}{ds^2}+\frac{d^2\psi_{k+1}}{ds^2}\right]=&\ \frac{(EC_w+KGR^2)}{REC_w}\cdot\frac{\sinh\mu b}{\mu}\left[\frac{KGR^4}{(EC_w+KGR^2)^2}(T_k+P_kR)-\frac{R^2}{KG}P_k\right]\\&-\frac{R^2}{(EC_w+KGR^2)}(M_{k-1}-2M_k+M_{k+1})\\&+2A_k\frac{EC_w+KGR^2}{REC_w}\cdot(\cosh\mu b-1)\end{aligned} \qquad \cdots\cdots (5)$$

$$-w_{k-1}+2w_k-w_{k+1} = R\left[-\theta_{k-1}+2\theta_k-\theta_{k+1}\right]$$

$$+\frac{R^3}{EC_{bd}+KGR^2}\left(\frac{\sinh\mu b}{\mu}-R\sin\beta\right)(T_k+P_kR)$$

$$-\left[\frac{R^2}{KG}\left(\frac{\sinh\mu b}{\mu}-b\right)P_k+\frac{2R^4(1-\cos\beta)}{EC_{bd}+KGR^2}M_k\right]$$

$$-\frac{2(EC_{bd}+KGR^2)}{KGR}(\cosh\mu b-1)A_k \quad // \qquad \cdots\cdots(6)$$

但し $\mu^2 = KG/EC_{bd}$. A_k は不定であり，3つの階差式から相互に消去するか，または境界条件で定まる。$\psi_k = \theta_k - w_k/R$ で，梁に生じた実際の捩れ量，ds は梁の長さ方向に微分することを示す。

5 $P_k = P \sin ik\pi/n$ の荷重の場合のタワミと捩れ

格点 k に作用する荷重が $P_k = P\sin ik\pi/n$ であれば，タワミ，$w_k = w \sin ik\pi/n$ 捩れ角，$\theta_k = \theta \sin ik\pi/n$ と表はされる。

$$C_{wp}=\frac{w}{P}=\frac{R^2}{4(\cos\beta-\cos i\pi/n)^2}\left(\frac{1}{EJ}+\frac{R^2}{EC_{bd}+KGR^2}\right)b\sin^2\beta$$

$$+\frac{R^2}{4(\cos\beta-\cos i\pi/n)}\left[\frac{2KGR^4}{(EC_{bd}+KGR^2)^2}R\sin\beta+\frac{1}{EJ}(b\cos\beta-R\sin\beta)\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{EC_{bd}+KGR^2}(b\cos\beta-5R\sin\beta)\right]$$

$$-\frac{R^2}{2(\cosh\mu b-\cos i\pi/n)}\left[\left(\frac{EC_{bd}}{EC_{bd}+KGR^2}\right)^2\cdot\frac{1}{KG}\cdot\frac{\sinh\mu b}{\mu}\right]$$

$$+\frac{R^2}{2(1-\cos i\pi/n)}\cdot\frac{b}{KG} \quad // \qquad \cdots\cdots(7)$$

$$C_{\theta p}=\frac{\theta}{P}=\frac{R}{4(\cos\beta-\cos i\pi/n)^2}\left(\frac{1}{EJ}+\frac{R^2}{EC_{bd}+KGR^2}\right)b\sin^2\beta$$

$$+\frac{R}{4(\cos\beta-\cos i\pi/n)}\left[\frac{2KGR^4}{(EC_{bd}+KGR^2)^2}R\sin\beta+\frac{1}{EJ}(b\cos\beta-R\sin\beta)\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{EC_{bd}+KGR^2}(b\cos\beta-3R\sin\beta)\right]$$

$$+\frac{R}{2(\cosh\mu b-\cos i\pi/n)}\cdot\frac{R^2EC_{bd}}{(EC_{bd}+KGR^2)^2}\cdot\frac{\sinh\mu b}{\mu} \quad // \qquad \cdots\cdots(8)$$

6 $T_k = T \sin ik\pi/n$ の格点トルクによるタワミと捩れ

前節と同じように変形は $w_k = w \sin ik\pi/n$, $\theta_k = \theta \sin ik\pi/n$ になる。

$$C_{wT} = \frac{w}{T} = C_{\theta P} \qquad \cdots\cdots (9)$$

$$C_{\theta T} = \frac{\theta}{T} = \frac{1}{4(\cos\beta - \cos i\pi/n)^2}\left(\frac{1}{EJ} + \frac{R^2}{EC_w + KGR^2}\right) b \sin^2\beta$$
$$+ \frac{1}{4(\cos\beta - \cos i\pi/n)}\left[\frac{2KGR^4}{(EC_w + KGR^2)^2} R\sin\beta + \left(\frac{1}{EJ} + \frac{R^2}{EC_w + KGR^2}\right)(b\cos\beta - R\sin\beta)\right]$$
$$- \frac{1}{2(\cosh\mu b - \cos i\pi/n)} \cdot \frac{KGR^4}{(EC_w + KGR^2)^2} \cdot \frac{\sinh\mu b}{\mu} \qquad \cdots\cdots\cdots (10)$$

7 曲線梁の変形のフーリエ表式

曲り梁に $p = p_i \sin i\pi s/l$ の線荷重, $t = t_i \sin i\pi s/l$ のトルク荷重が作用すれば，曲げモーメント，タワミ，捩れ角が同じく $\sin i\pi s/l$ の形に相似になる。(7) (8) (9) (10) の4つの式と対応するように書けば

$$C_{wp} = \frac{w}{p} = \frac{R^4\Phi^4}{EJ(n^2\pi^2 - \Phi^2)^2} + \frac{R^6\Phi^8}{n^2\pi^2(n^2\pi^2 - \Phi^2)^2[EC_w n^2\pi^2 + KGR^2\Phi^2]} \qquad \cdots (11)$$

$$C_{\theta p} = \frac{\theta}{p} = \frac{R^3\Phi^4}{EJ(n^2\pi^2 - \Phi^2)^2} + \frac{R^5\Phi^6}{(n^2\pi^2 - \Phi^2)^2[EC_w n^2\pi^2 + KGR^2\Phi^2]} \qquad \cdots\cdots (12)$$

$$C_{wt} = \frac{w}{t} = C_{\theta p} \qquad \cdots\cdots (13)$$

$$C_{\theta T} = \frac{\theta}{t} = \frac{R^2\Phi^4}{EJ(n^2\pi^2 - \Phi^2)^2} + \frac{R^4\Phi^4 n^2\pi^2}{(n^2\pi^2 - \Phi^2)^2[EC_w n^2\pi^2 + KGR^2\Phi^2]} \qquad \cdots\cdots (14)$$

(7)〜(10) 式において，格間を無限に小にし，すなわち $n \to \infty$ とし，$p = P/b = Pn/R\Phi$, $t = T/b = Tn/R\Phi$ とすれば (11)〜(14) の表式になることが確認できる。

8 曲線格子桁の近似計算法

捩れ剛性の小さいプレートガーダーを主桁にした曲線格子桁では，桁に捩りモーメントを受持つことは期待できない。従って，桁に生じた曲げモーメント M は，曲線の曲率成分 $1/R$ だけの外的なトルクと釣合う必要がある。

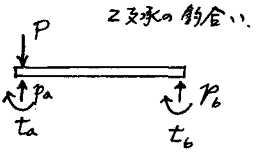
$$p = p_i \sin i\pi s/l \qquad \cdots\cdots (15)$$

の外力によって，曲げモーメントは，直梁の曲げモーメント

$$M = \frac{p_i l^2}{i^2\pi^2} \sin i\pi s/l \qquad \cdots\cdots (16)$$

と同時に外的トルク $t = -M/R = (p_i l^2/R i^2\pi^2) \sin i\pi s/l$ .... (17)

が作用して釣合う。格子桁としての横桁方向の釣合いは，主桁が，垂直荷重分 p と捩れモーメントの反力 t とを与える支承となり，横桁は，この支承からの反力とモーメントを受けて釣合う。



主桁からの反力 p と，モーメントとには(17)式の関係があるから，横桁の釣合いは容易に定まる。

3本以上の格子桁では，主桁のタワミが関係するが，(11)〜(14)式からタワミの影響を代入して，捩れモーメントの入る一般的なバネ支承系として横桁の釣合いを定めて各主桁えの分配係数を定めることができる。

実験を行なった結果を近似計算法と比較した所，良い傾向を与え，設計計算に応用すれば，安全側にあることを認め得た。

詳細は追って総括して発表の予定である。