II—34 マトリックスによって表わされる基本的な構造力学の計算

東京大学　正員　工博　平井　敦
武蔵工業大学　正員　○西脇威夫

従来構造力学上の諸計算はスカラー量によって取扱われて来た。スカラー量によって取扱うと、一つ一つの運算そのものは日常の感覚と割合によくマッチするので割合になじみ易い。而し構造物が複雑になってくると尨大な計算量に幻惑されて誤りが生じたり或いは考え違いをすることがある。

ベクトルはある数群を一つのものとして取扱うことが出来マトリックスはベクトル群を一つの単位で取扱うことが出来るので之によって諸計算を行うならばすべての構造物はそれを支配する基本的な定理の表現式そのもので諸計算をすることが可能になる。若しこの際そのマトリックス演算を行うことがスカラー量によって計算するより労力を多く要するとしてもその計算は極めて容易に電子計算機に導入することが出来るから電子計算機が使用出来る現在に於いては何の苦痛にもならない。又大概の場合筆算によってもそれを機械的に処理することが極めて容易である。又ローゼ桁のように簡単な計算法も導きうる。

構造物を大別すると、所謂梁型式のものとトラス型式のものとに分類出来る。前者では、曲げモーメントが主として作用し外力の形、構造物の形によっては軸力も作用する。後者に対しては一次的には軸力のみである。ここでは主として曲げモーメントのみが作用する梁形式のもの即ち、単純桁又は連続桁と、トラス構造としては単純トラス及び連続トラスについて述べよう。

構造物中に蓄えられる弾性変形のエネルギーは曲げモーメント又は部材力の二次形式で求まる。スカラー式で示すならば、$k-1$点とk点の間の曲げモーメントの変化が直線的であると仮定して

$$W=\int\frac{M_k^2}{2EI_k}ds=\Sigma\frac{\Delta S_k}{6EI_k}\left(M_{k-1}^2+M_{k-1}M_k+M_k^2\right)\qquad(1)$$

又は $$W=\Sigma\frac{S_k^2}{2EF_k}s_k=\Sigma\frac{1}{2}S_k^2\rho_k\qquad(2)$$

上式で M_k, S_k は任意の梁の要素又は部材に作用する曲げモーメント及び軸力，I_k, F_k はその要素の慣性モーメント又は部材の断面積である。

部材に或る順序を与えてそれをその順序に並べて $\mathbb{S}$ を定義しよう。即ち $\mathbb{S}$ の要素が $S_1, S_2 \cdots\cdots S_k \cdots\cdots S_n$ である。その時には (3)式の様になる。(3)式を簡単に (4)式のように書く。

$$W=\frac{1}{2}[S_1, S_2 \cdots\cdots S_k \cdots\cdots S_n]\times\begin{bmatrix}\rho_1 & & & & \\ & \rho_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \rho_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \rho_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ \vdots\\ S_k\\ \vdots\\ S_n\end{bmatrix}\qquad(3)$$

$$W=\frac{1}{2}\mathbb{S}^{*}[R_T]\mathbb{S}\qquad(4)$$

(4)式にならって(1)式をベクトル及びマトリックスで示すと

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\,\mathbb{M}^{*}[R_B]\,\mathbb{M} \qquad (5)$$

で示されるが この場合 $[R]$ を(3)式のように構成すると 梁の$(k-1)$点とk点の間の曲げモーメントは不変であると仮定することになる。 (1)式の様に直線変化を仮定する時には(6)式で示すように定義すればよい。

$$[R_B] = \begin{bmatrix} 2\rho_1 & \rho_1 & & & & & \\ \rho_1 & 2(\rho_1+\rho_2) & \rho_2 & & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & & \\ & & \rho_{k-1} & 2(\rho_{k-1}+\rho_k) & \rho_k & & \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & & & \rho_{n+1} & 2\rho_{n+1} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

ところで 我々の取扱う構造物は一般的に言って応力と外力とは線型関係にあると考えることが出来る。従って外力を$\mathbb{P}$で示せば

$$\mathbb{S} = [\eta_T]\,\mathbb{P} \qquad (7)$$

$$\mathbb{M} = [\eta_B]\,\mathbb{P} \qquad (8)$$

と表わすことが出来るわけである。この関係を(4)式又は(5)式に代入すると

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}^{*}[\eta_T]^{*}[R_T][\eta_T]\,\mathbb{P} \qquad (9)$$

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}^{*}[\eta_B]^{*}[R_B][\eta_B]\,\mathbb{P} \qquad (10)$$

(9)式又は(10)式で$\mathbb{P}^{*}$と$\mathbb{P}$にはさまれたマトリックスの積を次のように定義しよう。

$$[S_T] = [\eta_T]^{*}[R_T][\eta_T] \qquad (11) \qquad\qquad [S_B] = [\eta_B]^{*}[R_B][\eta_B] \qquad (12)$$

(11)式又は (12)式を(9)式又は (10)式に代入すると

$$\mathbb{W} = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}^{*}[S_T]\,\mathbb{P} \qquad (9)' \qquad\qquad \mathbb{W} = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}^{*}[S_B]\,\mathbb{P} \qquad (10)'$$

が得られる。*Castigliano* の定理は弾性変形のエネルギーを荷重で微分した形によって示されるから (9)'式又は (10)'式を荷重で微分すると *Castigliano* の定理が求まる。
(11)式, (12)式で示されるマトリックスは *leading diagonal* に関して対称になることは, 式の形から分るからその性質を利用して

$$\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \mathbb{P}} = [S_T]\,\mathbb{P} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbb{W}}{\partial \mathbb{P}} = [S_B]\,\mathbb{P} \qquad (14)$$

Castigliano の定理の意味するところから (11)式又は (12)式で定義されたマトリックスはそれぞれの構造物の撓みの影響線縦距によって構成されていることを知る。