II—31 トラスの変位の直接解法について

山梨大学　正員　近藤繁人

立体トラスの変位を計算によって求める方法としては、これまでに
1) カスチリアノの方法
2) 仮想仂の原理による方法
などがあるが、いずれも変位を求めたいと思う点にPまたは1を作用させ、それに対する各部材の応力を求めなければならない。これに対し筆者はさきに部材廻転角を使用してすべての格点のx, y, z軸方向の変位を全部同時に求める方法を提案したが、ここではこの方法をさらに拡張させ、与えられた荷重状態に対する部材応力度だけを使って直接にトラスの各格点の変位を求める方法について述べることにする。

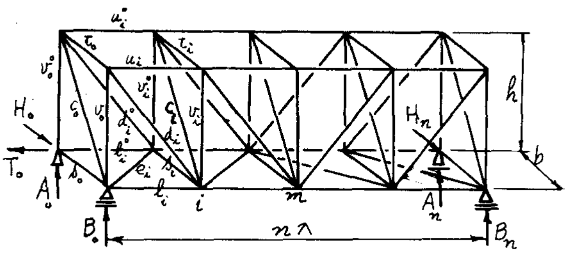

図-1

1. 図-1のような立体トラスの格点iの変位

(1) 格点iのA_0に対する変位（第13回土木学会年次学術講演会講演概要第I部P83）

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x_i &= \sum_{A_0}^{i}\left(\frac{\sigma x}{E}+\frac{xy}{l}\Delta\varphi - z\Delta\theta\right)\\
\Delta y_i &= \sum_{A_0}^{i}\left(\frac{\sigma y}{E}-l\Delta\varphi\right)\\
\Delta z_i &= \sum_{A_0}^{i}\left(\frac{\sigma z}{E}+\frac{yz}{l}\Delta\varphi + x\Delta\theta\right)
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

ここでσは部材応力度
Eはヤング係数
x, y, zおよびlは各部材のx, y, z軸方向分長およびxz平面次の分長
$\Delta\varphi$は各部材とy軸との間の角の変化量
$\Delta\theta$は各部材のy軸の周りの廻転角

(2) i番目の格間の部材廻転角

$\Delta\theta_{s0}$ $\Delta\theta_{c0}$ $\Delta\theta_{t0}$ $\Delta\varphi_{s0}$が解っているとき格間iの中の部材廻転角は三角形の閉合條件から

$$\Delta\theta_{si} = \frac{\lambda}{Eb}\sum_{1}^{i}\left(\sigma^{\circ}_{li}-\sigma_{li}\right)+\Delta\theta_{s0},\quad \Delta\theta_{ci} = \frac{\lambda}{Eb}\sum_{1}^{i}\left(\sigma^{\circ}_{ui}-\sigma_{li}\right)+\Delta\theta_{c0} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varphi^{\circ}_{li} &= \frac{h}{E\lambda}\left(\sigma^{\circ}_{di}-\sigma^{\circ}_{v\cdot i-1}\right)+\frac{\lambda}{Eh}\left(\sigma^{\circ}_{di}+\sum_{1}^{i-1}\sigma^{\circ}_{ui}-\sum_{1}^{i}\sigma^{\circ}_{li}\right)+\frac{b}{h}\left(\Delta\theta_{c0}-\Delta\theta_{s0}\right)\\
\Delta\theta^{\circ}_{li} &= \frac{b}{E\lambda}\left(\sigma_{s\cdot i-1}-\sigma_{ei}\right)+\frac{\lambda}{Eb}\left(-\sigma_{ei}-\sum_{1}^{i-1}\sigma_{li}+\sum_{1}^{i}\sigma^{\circ}_{li}\right)+\Delta\theta_{s0}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3) $\Delta\theta_{s0}$ $\Delta\theta_{c0}$ $\Delta\theta_{t0}$ $\Delta\varphi_{s0}$ の決定

これらの値は境界條件から決定される。たとえば左右対称の鉛直荷重が作用した場合について考えると中央断面においては　$\Delta\theta_{sm}=\Delta\theta_{cm}=\Delta\theta_{tm}=0$

端断面においては　$\Delta\varphi_{s0}=0$　であるから式(2)より

$$\therefore\ \Delta\theta_{s0} = -\frac{\lambda}{Eb}\sum_{i=1}^{m}\left(\sigma^{\circ}_{li}-\sigma_{li}\right);\qquad \Delta\theta_{c0} = -\frac{\lambda}{Eb}\sum_{i=1}^{m}\left(\sigma^{\circ}_{ui}-\sigma_{li}\right) \tag{4}$$

(4) 図-1 における外側下弦格点 A_i の変位

点 A_0 から点 A_i までの外側下弦材の x, y, z 軸方向分長および xz 平面内の分長は

$$x_1 = x_2 = \cdots\cdots = x_i = \lambda \qquad y_i = z_i = 0 \qquad l_1 = l_2 = \cdots\cdots = l_i = \lambda$$

従って A_0 に対する A_i の x, y, z 軸方向の変位は式(1)に式(3),(4)を代入して

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x_i &= \frac{\lambda}{E}\sum_1^i \sigma^\circ_{li} \\
\Delta y_i &= -\frac{h}{E}\sum_1^i\left(\sigma^\circ_{di} - \sigma^\circ_{v.i-1}\right) - \frac{\lambda^2}{Eh}\left(\sum_1^i \sigma^\circ_{di} + \sum_1^i\sum_1^{i-1}\sigma^\circ_{ui} - \sum_1^i\sum_1^i \sigma^\circ_{li}\right) + \frac{i\lambda^2}{Eh}\sum_1^m\left(\sigma^\circ_{ui} - \sigma^\circ_{li}\right) \\
\Delta z_i &= \frac{b}{E}\sum_1^i\left(\sigma_{s.i-1} - \sigma_{ei}\right) - \frac{\lambda^2}{Eb}\left(\sum_1^i \sigma_{ei} + \sum_1^i\sum_1^{i-1}\sigma_{li} - \sum_1^i\sum_1^i \sigma^\circ_{li}\right) + \frac{i\lambda^2}{Eb}\sum_1^m\left(\sigma_{li} - \sigma^\circ_{li}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(5) $\sum_1^i \sigma_i$ および $\sum_1^i\sum_1^i \sigma_i$ の計算

これらの計算は右のような図表の中で行なえば非常に簡単で，機械的に行なうことができるので誤算も少ない。

i	σ_i	$\sum_1^i \sigma_i$	$\sum_1^i\sum_1^i \sigma_i$
1	σ_1	σ_1	σ_1
2	σ_2	$\sigma_1+\sigma_2$	$2\sigma_1+\sigma_2$
3	σ_3	$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$	$3\sigma_1+2\sigma_2+\sigma_3$
4	σ_4	$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4$	$4\sigma_1+3\sigma_2+2\sigma_3+\sigma_4$

2. 図-2 のような平面トラスの格点 i の変位

図のような平面プラットトラスにおいて

(1) 格点 i の A_0 に対する変位

$$\text{式(1)より}\quad \left.\begin{aligned}
\Delta x_i &= \sum_{A_0}^i\left(\frac{\sigma x}{E} + y\,\Delta\varphi\right) \\
\Delta y_i &= \sum_{A_0}^i\left(\frac{\sigma y}{E} - x\,\Delta\varphi\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

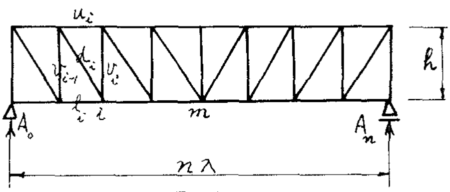

図-2

(2) i 番目の格間の部材廻転角

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\varphi_{li} &= \frac{h}{E\lambda}\left(\sigma_{di} - \sigma_{v.i-1}\right) + \frac{\lambda}{Eh}\left(\sigma_{di} + \sum_1^{i-1}\sigma_{ui} - \sum_1^i \sigma_{li}\right) + \Delta\varphi_{v0} \\
\Delta\varphi_{vi} &= \frac{\lambda}{Eh}\sum_1^i\left(\sigma_{ui} - \sigma_{li}\right) + \Delta\varphi_{v0}
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

(3) $\Delta\varphi_{v0}$ の決定

これは境界条件から決定することができる。たとえば左右対称の鉛直荷重が作用した場合には，中央の鉛直部材の廻転角 $\Delta\varphi_{vm}$ は 0 であるから式(7)より

$$\Delta\varphi_{v0} = -\frac{\lambda}{Eh}\sum_1^m\left(\sigma_{ui} - \sigma_{li}\right) \qquad (8)$$

(4) 図-2 における下弦格点 i の変位

式(7)と(8)を(6)に代入すれば，式(5)の Δx_i, Δy_i と同じ形の式が得られる。

以上の通り，トラスの部材応力 σ さえ解れば直ちに任意の格点の任意方向への変位を求めることができるので，これを変位の直接解法または即時解法と呼ぶことができる。