

II-11 吊橋および Langer 橋の組み合わせ不静定係数について

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇

吊橋の cable の形状及び Langer 橋の arch の形状は、

夫々、sag f 及び rise f をもつ二次拋物線形とする。

図1-a, bにおいて、吊橋 cable の支間中央点及び Langer 橋の arch crown を仮りに切断し、ここに一組の力 1 をかけたときの載荷点の水平方向の elongation 及び shortening と δ_{aa} とし、その時の補剛桁の x 点の曲げモーメントを M_a とすれば、吊橋又は Langer 橋の不静定係数 γ は

$$\gamma = \frac{\int_0^l \frac{M_a^2}{EI} dx}{\delta_{aa}} \quad \text{で表され、これは定数であり、構造物そのものの特性を示す値である。}$$

支間 l の全長に亘って等布荷重 q (kg/m) が満載したときの曲げモーメント図、せん断力図、撓み図は、図1-c, d, e のようになり、夫々、単純桁の曲げモーメント図、せん断力図、撓み図を $(1-\gamma)$ 倍したものになる。

次に、図2-a のように一つの補剛桁を共有し、これに arch 又は吊橋 cable が n 組組み合わせられた構造 (n 次不静定) (図2-a では 4 次不静定) を考える。

今夫々の不静定係数を $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ とすれば、橋全体としての不静定係数 (組み合わせ不静定係数と呼ぶことにする) $\bar{\gamma}$ は、

$$\bar{\gamma} = \sum_{i=1}^n \left| \begin{array}{cccc} \gamma_1^{-1} & & & \\ & \gamma_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n^{-1} \end{array} \right| \div \left| \begin{array}{cccc} \gamma_1^{-1} & & & \\ & \gamma_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \gamma_n^{-1} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} \text{-- } j \text{ 行} \\ \text{-- } i \text{ 列} \end{array}$$

も成立する。例えば、図2-a のような 4 次不静定構造では、

$$\bar{\gamma} = \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccc} \gamma_1^{-1} & \gamma_{12}^{-1} & \gamma_{13}^{-1} & \gamma_{14}^{-1} \\ \gamma_{21}^{-1} & \gamma_2^{-1} & \gamma_{23}^{-1} & \gamma_{24}^{-1} \\ \gamma_{31}^{-1} & \gamma_{32}^{-1} & \gamma_3^{-1} & \gamma_{34}^{-1} \\ \gamma_{41}^{-1} & \gamma_{42}^{-1} & \gamma_{43}^{-1} & \gamma_4^{-1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} \gamma_1^{-1} & \gamma_{12}^{-1} & \gamma_{13}^{-1} & \gamma_{14}^{-1} \\ \gamma_{21}^{-1} & \gamma_2^{-1} & \gamma_{23}^{-1} & \gamma_{24}^{-1} \\ \gamma_{31}^{-1} & \gamma_{32}^{-1} & \gamma_3^{-1} & \gamma_{34}^{-1} \\ \gamma_{41}^{-1} & \gamma_{42}^{-1} & \gamma_{43}^{-1} & \gamma_4^{-1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} \gamma_1^{-1} & \gamma_{12}^{-1} & \gamma_{13}^{-1} & \gamma_{14}^{-1} \\ \gamma_{21}^{-1} & \gamma_2^{-1} & \gamma_{23}^{-1} & \gamma_{24}^{-1} \\ \gamma_{31}^{-1} & \gamma_{32}^{-1} & \gamma_3^{-1} & \gamma_{34}^{-1} \\ \gamma_{41}^{-1} & \gamma_{42}^{-1} & \gamma_{43}^{-1} & \gamma_4^{-1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cccc} \gamma_1^{-1} & \gamma_{12}^{-1} & \gamma_{13}^{-1} & \gamma_{14}^{-1} \\ \gamma_{21}^{-1} & \gamma_2^{-1} & \gamma_{23}^{-1} & \gamma_{24}^{-1} \\ \gamma_{31}^{-1} & \gamma_{32}^{-1} & \gamma_3^{-1} & \gamma_{34}^{-1} \\ \gamma_{41}^{-1} & \gamma_{42}^{-1} & \gamma_{43}^{-1} & \gamma_4^{-1} \end{array} \right| \right\} \div \left| \begin{array}{cccc} \gamma_1^{-1} & \gamma_{12}^{-1} & \gamma_{13}^{-1} & \gamma_{14}^{-1} \\ \gamma_{21}^{-1} & \gamma_2^{-1} & \gamma_{23}^{-1} & \gamma_{24}^{-1} \\ \gamma_{31}^{-1} & \gamma_{32}^{-1} & \gamma_3^{-1} & \gamma_{34}^{-1} \\ \gamma_{41}^{-1} & \gamma_{42}^{-1} & \gamma_{43}^{-1} & \gamma_4^{-1} \end{array} \right| \quad \text{となる。}$$

このようにして $\bar{\gamma}$ を先づ予め計算しておけば、支間 l に等布荷重 q (kg/m) が満載したときの曲げモーメント図、せん断力図、撓み図は、図2-b, c, d のようになり、夫々、単純桁の曲げモーメント図、せん断力図、撓み図を $(1-\bar{\gamma})$ 倍したものになる。

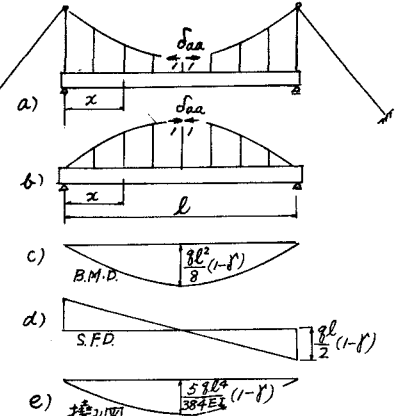


図1-a, b, c, d, e

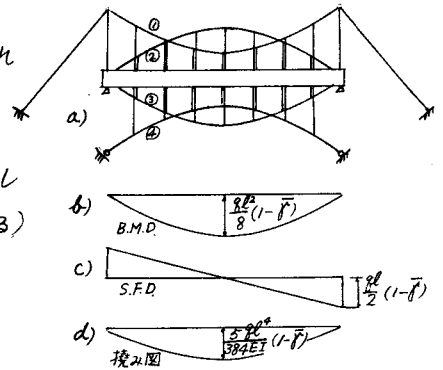


図2-a, b, c, d

で表され、定数である。ここで分子分母の行列式の空間には γ_{ij}^{-1} が入る。 $\gamma_{ij}^{-1} = \gamma_{ji}^{-1}$ なる関係

又、補剛桁の曲げモーメント、せん断力の影響線も、一次不静定の吊橋又は Langer 橋と同様に求めてみる。すなわち δ の代りに $\bar{\delta}$ を用いればよい。

ここで δ_{ij}^{-1} の性質を述べると、

$$\delta_{ij}^{-1} = \frac{\int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dx}{\delta_{ij}} \text{ であるから, } \delta_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij}}{\int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dx} \text{ である. して, } \delta_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_i Q_j}{GA} dx \text{ である.}$$

しかるに、この δ_{ij} の右辺の中で、 $\int_0^l \frac{N_i N_j}{EA} dx$ は、外的不静定橋（吊橋、逆 Langer 橋）と、内的不静定橋（下路 Langer 橋、倒立 Langer 橋）との組み合わせでは $\int_0^l \frac{N_i N_j}{EA} dx = 0$ 、外的不静定橋と外的不静定橋との組み合わせでは $\int_0^l \frac{N_i N_j}{EA} dx = 0$ 、内的不静定橋と内的不静定橋との組み合わせでは $\int_0^l \frac{N_i N_j}{EA} dx \neq 0$ である。故に、図 2-a では $\delta_{12}^{-1} = \delta_{13}^{-1} = \delta_{24}^{-1} = \delta_{34}^{-1} = \delta_{14}^{-1} = \delta_{23}^{-1}$ である。

次に、この組み合わせ不静定係数 $\bar{\delta}$ の公式を検算してみよう。

今 図 3 の横断面図のように、arch 材と吊材とを、

夫々、 n 等分してみる。そして、この分離した Langer 橋（但し、補剛桁は共有）の夫々の不静定係数を $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ とし、これに組み合わせ公式を

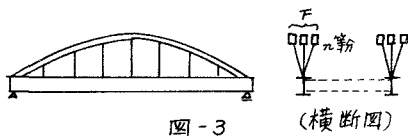


図-3

(横断面図)

適用した場合、組み合わせ不静定係数 $\bar{\delta}$ が、元の n 等分する前の Langer 橋の不静定係数に等しくなればよい。骨組材 (arch 材, 吊材) の分離する前の断面を F 、分離した後の断面を、

$F_1, F_2, \dots, F_n$ とすると、

$$\delta_1^{-1} = \frac{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx + \sum \frac{S_1^2}{EF} \delta}, \quad \delta_2^{-1} = \frac{\int_0^l \frac{M_2^2}{EI} dx}{\int_0^l \frac{M_2^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_2^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_2^2}{GA} dx + \sum \frac{S_2^2}{EF} \delta}, \quad \dots, \quad \delta_n^{-1} = \frac{\int_0^l \frac{M_n^2}{EI} dx}{\int_0^l \frac{M_n^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_n^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_n^2}{GA} dx + \sum \frac{S_n^2}{EF} \delta}$$

しかるに $F_1 = F_2 = \dots = F_n$ とすれば、 $\delta_1^{-1} = \delta_2^{-1} = \dots = \delta_n^{-1}$ である。今 $\delta_1^{-1} = \delta_2^{-1} = \dots = \delta_n^{-1} = a$, $\delta_{12}^{-1} = \delta_{13}^{-1} = \dots = \delta_{n-1,n}^{-1} = b$ とおけば

$$\bar{\delta} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & b & \dots & b \\ 1 & a & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \dots & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & \dots & b \\ b & 1 & \dots & b \\ b & 1 & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 1 & \dots & a \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a & b & \dots & 1 \\ b & a & \dots & 1 \\ b & b & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & 1 \end{vmatrix} \right\} \div \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \frac{n(a-b)^{n-1}}{(a-b)^{n-1}\{a+(n-1)b\}} = \frac{n}{a+(n-1)b}$$

$$= n \left\{ \delta_1^{-1} + (n-1) \delta_{12}^{-1} \right\} \quad \text{しかるに} \quad \frac{1}{\delta_1} = \frac{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx + \sum \frac{S_1^2}{EF} \delta}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx}, \quad \frac{1}{\delta_{12}} = \frac{\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1 Q_2}{GA} dx}{\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx} = \frac{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx},$$

$$\therefore \bar{\delta} = \frac{n}{\frac{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx + \sum \frac{S_1^2}{EF} \delta}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx} + (n-1) \frac{\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1 N_2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1 Q_2}{GA} dx}{\int_0^l \frac{M_1 M_2}{EI} dx}} = \frac{n \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx}{n \left\{ \int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx \right\} + \sum \frac{S_1^2}{EF} \delta}$$

$$= \frac{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx + \frac{1}{n} \sum \frac{S_1^2}{EF} \delta} \quad \text{しかるに } F_1 = \frac{F}{n} \text{ であるから}$$

$\bar{\delta} = \frac{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx + \sum \frac{S_1^2}{EF} \delta}{\int_0^l \frac{M_1^2}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1^2}{EA} dx + \int_0^l \frac{Q_1^2}{GA} dx + \sum \frac{S_1^2}{EF} \delta}$ となり、これは全く分離しない元の Langer 橋の不静定係数に等しい。かくて証明せられた。図 2-a のような組み合わせ構造や Langer 橋を吊橋で補強したりする場合などの解析に、この理論は役に立つ。