

II-8 可撓支塔の曲げ剛性が吊橋の自由振動と耐風安定性に 及ぼす影響について

北海道大学 正員 今 俊 三
正員 〇和 田 惇

序言 吊橋の自由振動に関しては多くの人の研究があるが、いずれも *rockier tower* として支塔を扱っている。本研究では *flexible cantilever tower* の場合に、その曲げ剛性が吊橋の自由振動数、さらに又吊橋の耐風安定性の判定指標としての *Steinman index* への影響を理論的に、及び算例をもって試み、これを明らかにしたものである。

I 基本式

吊橋振動系のエネルギーの平衡より、温度変化の影響を無視すると、

$$\begin{aligned} & \sum_{1,2,3} \int EI(x) \dot{v}(x)^2 dx + \sum_T \int EI_T(y) \dot{v}_T(y)^2 dy + \sum_{1,2,3} H \int \dot{v}(x)^2 dx - \sum_{1,2,3} H_p y \int \dot{v}(x) dx \\ & = \omega_B^2 \left\{ \sum_{1,2,3} \int m(x) \dot{v}(x)^2 dx + \sum_T \int m_T(y) \dot{v}_T(y)^2 dy \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

但し、 $m(x)$, $m_T(y)$: 吊橋及び支塔の質量、 ω_B : 曲げの固有円振動数 (sec^{-1})

さらに ケーブルの垂直接写長さの変化の関係より、

$$\frac{L_{K(\frac{1}{2})}}{E_K F_K} H_{P(\frac{1}{2})} + y''(\frac{1}{2}) \int \dot{v}(x) dx = \begin{cases} \frac{\Delta l}{2\Delta l} \\ \frac{2\Delta l}{\Delta l} \end{cases} \quad L_{K(\frac{1}{2})} = \int_{(\frac{1}{2})} \cos^2 \varphi dx \quad (2)$$

上式に於て、suffix 1, 2, 3: 夫々 側径間、中央径間、側径間を示す。T: 支塔を示す。

Δl : 支塔頂部のたわみ量。支塔は各径間のケーブルに生ずる水平張力 H_p の不均衡によってたわむものとする。支塔のたわみ曲線 $v_T(y)$ は次式で与えられる。

$$v_T(y) = \Delta l \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi y}{2h_T}\right) = \frac{\xi_T}{EI_T} (H_{P2} - H_{P1}) \left(1 - \sin \frac{\pi y}{2h_T}\right) \quad (3)$$

但し、 EI_T : 支塔の曲げ剛性、 $I_T^1 = I_T - \sqrt{E} / \left(\frac{\pi}{2h_T}\right)^2$ 、 $\xi_T = \frac{32}{\pi^4} h_T^3$

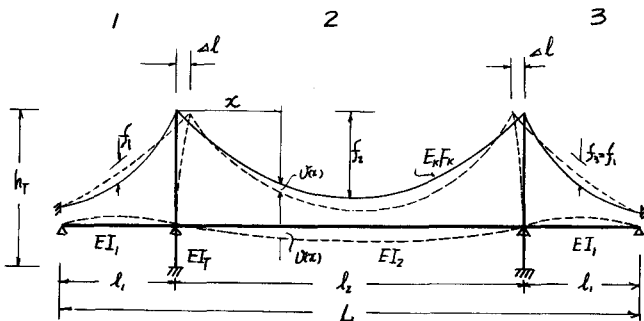


図 - 1

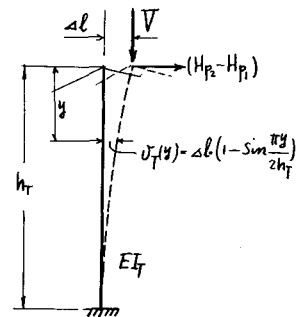


図 - 2

式(2)(3)の関係を式(1)に代入し整理すると

$$\sum_{1,2,3} \left(EI(x) \dot{v}(x)^2 + \sum_{1,2,3} H \left(\dot{v}(x)^2 dx + a_1 \left[\dot{y}_1''(v_1(x) dx \right]^2 + a_2 \left[\dot{y}_2''(v_2(x) dx \right]^2 + a_{12} \left[\dot{y}_1''(v_1(x) dx \right] \left[\dot{y}_2''(v_2(x) dx \right] \right) \right) \right. \\ \left. = \omega_B^2 \left[\sum_{1,2,3} \left(m(x) v(x)^2 dx + m_T \left(b_1 \left[\dot{y}_1''(v_1(x) dx \right]^2 + b_2 \left[\dot{y}_2''(v_2(x) dx \right]^2 + b_{12} \left[\dot{y}_1''(v_1(x) dx \right] \left[\dot{y}_2''(v_2(x) dx \right] \right) \right) \right] \right) \quad (4)$$

係数 a, b は次表に示すが, (i) O-S-O 型吊橋(補剛桁が中央径間のみで吊られてゐる) (ii) S-S-S 型吊橋(3径間連続補剛桁, 3径間で吊られてゐる) の二つに分けて考える。

型	対称振動				逆対称振動			
O S O	a_2	$\Phi_S^2 \left(\frac{L_{k1} EI_T^I}{E_k F_k \xi_T} + 1 \right) + 2 \Phi_S^2 \frac{EI_T^I}{\xi_T} \left(\frac{L_{k2}}{E_k F_k} \right)^2$	b_2	$0.4536 \Phi_S^2 \left(\frac{L_{k1}}{E_k F_k} \right)^2 h_T$	a_2	$2 \frac{EI_T^I}{\xi_T}$	b_2	$0.4536 h_T$
S S S S	a_1	$2 \Phi_S^2 \left(\frac{L_{k2} EI_T^I}{E_k F_k \xi_T} + 2 \right) + 2 \Phi_S^2 \frac{EI_T^I}{\xi_T} \left(\frac{L_{k2}}{E_k F_k} \right)^2$	b_1	$0.4536 \Phi_S^2 \left(\frac{L_{k2}}{E_k F_k} \right)^2 h_T$	a_1	$2 \Phi_A + 2 \Phi_A^2 \frac{EI_T^I}{\xi_T} \left(\frac{E_k F_k}{L_{k1}} \right)^2$	b_1	$0.4536 \Phi_A^2 \left(\frac{E_k F_k}{L_{k1}} \right)^2 h_T$
	a_2	$\Phi_S \left(\frac{L_{k1} EI_T^I}{E_k F_k \xi_T} + 1 \right) + 2 \Phi_S^2 \frac{EI_T^I}{\xi_T} \left(\frac{L_{k1}}{E_k F_k} \right)^2$	b_2	$0.4536 \Phi_S^2 \left(\frac{L_{k1}}{E_k F_k} \right)^2 h_T$	a_2	不要	b_2	不要
	a_{12}	$-4 \Phi_S + 4 \Phi_S^2 \frac{EI_T^I}{\xi_T} \frac{L_{k1} L_{k2}}{E_k F_k E_k F_k}$	b_{12}	$0.9072 \Phi_S^2 \left(\frac{L_{k1}}{E_k F_k} \frac{L_{k2}}{E_k F_k} \right) h_T$	a_{12}	不要	b_{12}	不要

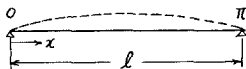
$$\text{但し } \Phi_S = \left[\frac{L_{k1} L_{k2} EI_T^I}{E_k F_k E_k F_k \xi_T} + \frac{L_{k2}}{E_k F_k} + 2 \frac{L_{k1}}{E_k F_k} \right]^{-1}, \quad \Phi_A = \left[\frac{EI_T^I}{\xi_T} + \frac{E_k F_k}{L_{k1}} \right]^{-1}$$

II 曲げの固有振動

振動理論式は 長柱に関する Euler 臨界値表現 $P_E = \pi^2 EI / (l/n)^2$ を利用すると表式が簡明となる。

(i) O-S-O 型吊橋

(i) 対称振動 (O-NV)



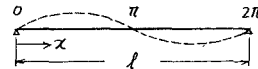
$$v(x) = \sin \frac{\pi x}{l}$$

$$R = \left[1 + \frac{H}{P_E} + a_2 \frac{r}{P_E} \frac{8l^3}{\pi^4} \right]^{-1}$$

$$\omega_B = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{P_E}{R} \frac{1}{m + m_T b_2 r \frac{8l}{\pi^2}}}$$

$$P_E = EI \left(\frac{\pi}{l} \right)^2, \quad r = (y'')^2$$

(ii) 逆対称振動 (I-NV)



$$v(x) = \sin \frac{2\pi x}{l}$$

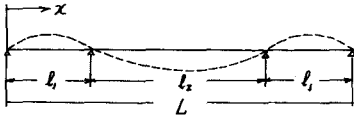
$$R = \left[1 + \frac{H}{P_E} + a_2 \frac{r}{P_E} \frac{l^3}{2\pi^4} \right]^{-1}$$

$$\omega_B = \frac{2\pi}{l} \sqrt{\frac{P_E}{R} \frac{1}{m + m_T b_2 r \frac{l}{\pi^2}}}$$

$$P_E = EI \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2$$

(2) S-S-S 型吊橋

(i) 対称振動 (0 NV)



$$U(x) = \sin \frac{\pi x}{L} - \frac{\sin \frac{\pi l_1}{L}}{\sin \frac{3\pi l_1}{L}} \sin \frac{3\pi x}{L}$$

$$R = \left[1 + \frac{H}{P_E} + \frac{a_1 \eta_1 q_1 + a_2 \eta_2 q_2 + a_3 \eta_3 q_3}{P_E (1 + q \bar{S})} \frac{2L^3}{\pi^4} \right]^{-1}$$

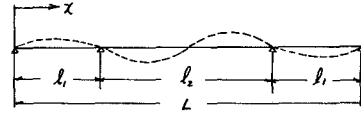
$$\omega_B = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{P_E}{R} \frac{1 + q \bar{S}}{m(1 + \bar{S}) + m_T (b_1 \eta_1 q_1 + b_2 \eta_2 q_2 + b_3 \eta_3 q_3) \frac{2L}{\pi^2}}}$$

$$P_E = EI \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1 + \theta_1 \bar{S}}{1 + q \bar{S}}, \quad \eta_{(2)} = \left[\ddot{y}_{(2)}'' \right]^2$$

$$q_1 = \left\{ - \left(1 - \cos \frac{\pi l_1}{L} \right) + \frac{1}{3} \sqrt{\bar{S}} \left(1 - \cos \frac{3\pi l_1}{L} \right) \right\}^2, \quad \bar{S} = \left(\frac{\sin \frac{\pi l_1}{L}}{\sin \frac{3\pi l_1}{L}} \right)^2$$

$$q_2 = \left\{ \left(\cos \frac{\pi(l_1+l_2)}{L} - \cos \frac{\pi l_1}{L} \right) + \frac{1}{3} \sqrt{\bar{S}} \left(\cos \frac{3\pi(l_1+l_2)}{L} - \cos \frac{3\pi l_1}{L} \right) \right\}^2$$

(ii) 逆対称振動 (1 NV)



$$U(x) = \sin \frac{2\pi x}{L} - \frac{\sin \frac{2\pi l_1}{L}}{\sin \frac{4\pi l_1}{L}} \sin \frac{4\pi x}{L}$$

$$R = \left[1 + \frac{H}{P_E} + \frac{a_1 \eta_1 q_1}{P_E (1 + 4 \bar{S})} \frac{L^3}{8\pi^4} \right]^{-1}$$

$$\omega_B = \frac{2\pi}{L} \sqrt{\frac{P_E}{R} \frac{1 + 4 \bar{S}}{m(1 + \bar{S}) + m_T b_1 \eta_1 q_1 \frac{L}{2\pi^2}}}$$

$$P_E = EI \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 \frac{1 + 16 \bar{S}}{1 + 4 \bar{S}}, \quad \eta_{(2)} = \left[\ddot{y}_{(2)}'' \right]^2$$

$$q_1 = \left\{ \left(1 - \cos \frac{2\pi l_1}{L} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\bar{S}} \left(1 - \cos \frac{4\pi l_1}{L} \right) \right\}^2$$

$$\bar{S} = \left(\frac{\sin \frac{2\pi l_1}{L}}{\sin \frac{4\pi l_1}{L}} \right)^2$$

III Steinman の stiffness index への影響

吊橋の耐風安定性の実用的判定基準としての Steinman stiffness index は 2 の部分から成立して 1) 。

$$S_1 = \omega_B^2 w / g b^2 \geq 23500, \quad S_2 = R \sqrt{S_1} \geq 45 \quad (5)$$

但し $g: 9.8 \text{ m/sec}^2$ $w: \text{片側当り死荷重 (kg/m)}$ $b: \text{有効巾員 (m)}$

$$R = \left[1 + \frac{\sum H \int \dot{u}^2 dx + a_1 \left[\int \dot{u}^2 dx \right]^2 + a_2 \left[\int \ddot{u}^2 dx \right]^2 + a_3 \left[\int \dot{u}^2 dx \right] \left[\int \ddot{u}^2 dx \right]}{\sum EI(x) \dot{u}^2 dx} \right]^{-1} \quad (0 \leq R \leq 1) \quad (6)$$

上記 R は II で求めた R に外ならぬ。 S_1 の条件によって吊橋が空気力学的に安定なることを、 S_2 の条件により吊橋の曲げ振動の発振を阻止し得る程度に補剛桁の damping capacity が十分であることを判定し得るものである。これによって上式中の ω_B , R を通じて支塔の曲げ剛性が吊橋の耐風安定性に強い影響を持つことが明らかである。

Steinman index の臨界値を K とすれば 臨界値安全率 ν は次式で与えられる。

$$\nu_{(2)} = \left[\frac{S_{(2)}}{K_{(2)}} \right] \geq 1 \quad (7)$$

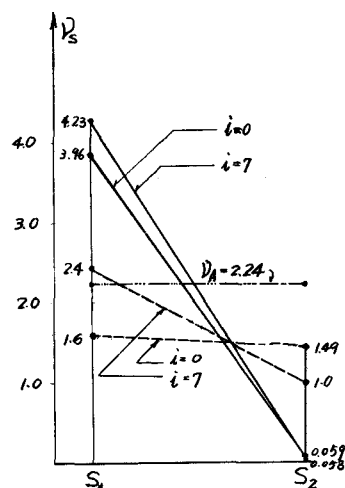
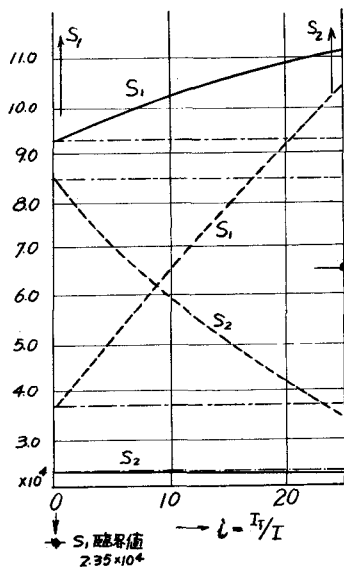
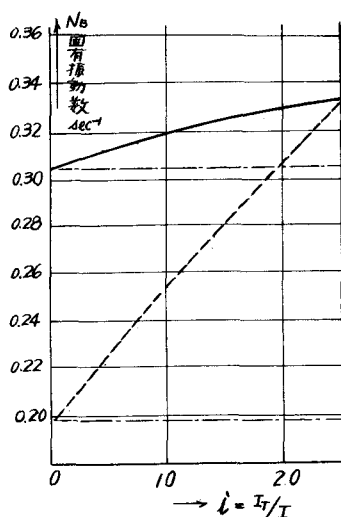
但し 1.2: S_1, S_2 に対応する suffix である。

IV 数値計算例

1. 0-S-0 型吊橋 $l = 500 \text{ m}$, $f = 50 \text{ m}$, $H = 9375 \text{ t}$ $I = 1.5 \text{ m}^4$

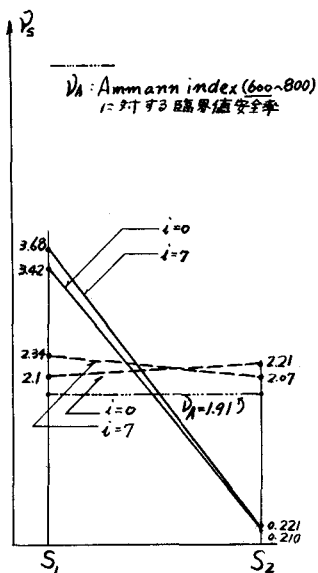
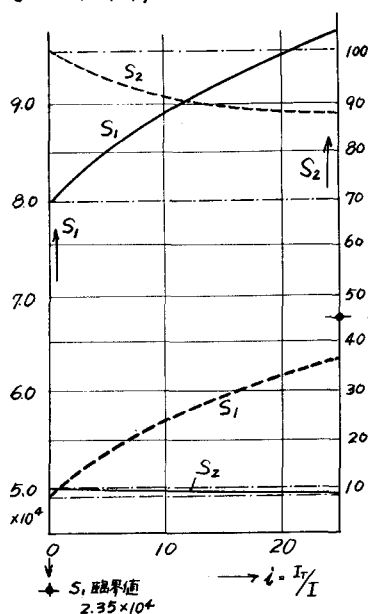
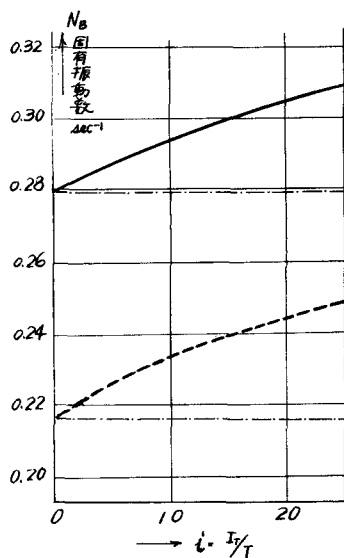
$h_T = 65 \text{ m}$

$w = 15 \text{ t/m}$ $E_F K = 0.4485 \text{ t (片側)}$



2. S-S-S 型吊橋 $L = 125 + 500 + 125$ (m)

(他諸元は 1. と同じ.)



(参考文献)

1. 今後三: 「吊橋の耐風安定性の判定基準について」土木学会北海道支部講習会テキスト(昭34)
2. 平井敦: 「鋼橋 III」
3. 「若戸吊橋の耐風安定性に関する実験的研究」(1960.1)
4. Steinman: Paper No. 2420, Trans. A.S.C.E. vol 115, 1950.
5. Bleich: Paper No. 2385, Trans. A.S.C.E. vol 114, 1949.
6. Hawranek/Steinhardt.: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. (1958)