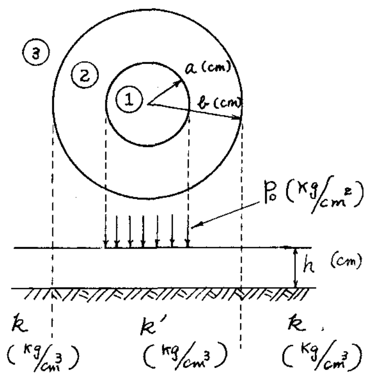
I—35　不均一な弾性路盤上の舗装版の応力解析

中央大学工学部　正員　山口　柏樹

舗装版の耐久性は路床又は路盤の均一性の良否に影響されることが大きい。本報告においては無限に拡がる舗装版内の応力が路盤の不均一性によって如何に変るか調べるため、軸対称的な局部劣弱な路盤の場合について解析した結果を報告する。



左図で円a内には p_0 (kg/cm²) の一様な輪荷重が載る。軸対称的に円b内の地盤反力係数 k' (kg/cm³) は、その外部の k (kg/cm³) より小さい。舗装版のYoung率をE (kg/cm²)、Poisson比を ν、全厚を h (cm) とすると版の曲げ剛性は $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ (kg/cm) である。図の領域①、②、③について薄板としての舗装版のタワミを w_1, w_2, w_3 とすると

$$\left.\begin{aligned} D\nabla^4 w_1 + k' w_1 &= p_0 \quad (r\leq a) & \text{i)}\\ D\nabla^4 w_2 + k' w_2 &= 0 \quad (a<r\leq b) & \text{ii)} \\ D\nabla^4 w_3 + k\, w_3 &= 0 \quad (b<r) & \text{iii)}\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

但し $\nabla^2 = d^2/dr^2 + d/r\,dr$

版内の曲げモーメントと剪断力は d/dr を $'$ で表わして

$$M_r = -D\{\nabla^2 w_i + (\nu-1)\, w_i'/r\} \qquad Q_r = -D(\nabla^2 w_i)' \quad (2)$$

各境界上でタワミ、傾角、曲げモーメント、剪断力が連続である故

$$\left.\begin{aligned} &\text{円 } a \text{ 上 } (r=a):\quad w_1 = w_2,\quad w_1' = w_2',\quad \nabla^2 w_1 = \nabla^2 w_2,\quad (\nabla^2 w_1)' = (\nabla^2 w_2)' \quad \text{i)}\\ &\text{円 } b \text{ 上 } (r=b):\quad w_2 = w_3,\quad w_2' = w_3',\quad \nabla^2 w_2 = \nabla^2 w_3,\quad (\nabla^2 w_2)' = (\nabla^2 w_3)' \quad \text{ii)}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(1)の各式の解は

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (p_0/k')\left[1 + A\{\mathrm{ber}(\rho r) + i\,\mathrm{bei}(\rho r)\} + \bar{A}\{\mathrm{ber}(\rho r) - i\,\mathrm{bei}(\rho r)\}\right]\\ w_2 &= (p_0/k')\left[B\{\mathrm{ber}(\rho r) + i\,\mathrm{bei}(\rho r)\} + \bar{B}\{\mathrm{ber}(\rho r) - i\,\mathrm{bei}(\rho r)\}\right.\\ &\qquad \left. + C\{\mathrm{Ker}(\rho r) + i\,\mathrm{Kei}(\rho r)\} + \bar{C}\{\mathrm{Ker}(\rho r) - i\,\mathrm{Kei}(\rho r)\}\right]\\ w_3 &= (p_0/k')\left[F\{\mathrm{Ker}(\lambda r) + i\,\mathrm{Kei}(\lambda r)\} + \bar{F}\{\mathrm{Ker}(\lambda r) - i\,\mathrm{Kei}(\lambda r)\}\right]\\ &\text{但し}\quad \rho^4 = k'/D \qquad \lambda^4 = k/D \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

こゝに ber, bei, Ker, Kei 函数は変形された円柱函数で次の如く定義される。

$$\mathrm{ber}\,z + i\,\mathrm{bei}\,z = J_0(\sqrt{i^3}\,z) = I_0(\sqrt{i}\,z), \quad \mathrm{Ker}\,z + i\,\mathrm{Kei}\,z = K_0(\sqrt{i}\,z) = \pi i H_0^{(1)}(\sqrt{i^3}\,z)/2$$

$$\mathrm{ber}\,z - i\,\mathrm{bei}\,z = J_0(z/\sqrt{i^3}) = I_0(z/\sqrt{i}), \quad \mathrm{Ker}\,z - i\,\mathrm{Kei}\,z = K_0(z/\sqrt{i}) = \pi i H_0^{(1)}(z/\sqrt{i})/2$$

(4)式に含まれる8ヶの複素常数 $A, \ldots, \bar{F}$ (A, $\bar{A}$ 等は互に共軛) は(3)より定められる。今(4)を(3)のi)に入れて順次に得られる4ヶの式を改めて i), ii), iii), iv) とし i)+iii), ii)+iv) を作ると $\rho a = \alpha$ として

$$\left.\begin{aligned} A(\mathrm{ber}\,\alpha + i\,\mathrm{bei}\,\alpha) - C(\mathrm{Ker}\,\alpha + i\,\mathrm{Kei}\,\alpha) &= B(\mathrm{ber}\,\alpha + i\,\mathrm{bei}\,\alpha) - 1/2\\ A(\mathrm{ber}'\alpha + i\,\mathrm{bei}'\alpha) - C(\mathrm{Ker}'\alpha + i\,\mathrm{Kei}'\alpha) &= B(\mathrm{ber}'\alpha + i\,\mathrm{bei}'\alpha)\end{aligned}\right\}$$

上式をA, Cの連立方程式と考えると係数の行列式は $1/\alpha$ と計算されるので

$$A = \alpha\left\{-B/\alpha + (\mathrm{Ker}'\alpha + i\,\mathrm{Kei}'\alpha)/2\right\} \qquad C = (\alpha/2)(\mathrm{ber}'\alpha + i\,\mathrm{bei}'\alpha) \tag{5}$$

又は $A = A_1 + iA_2$, $\bar{A} = A_1 - iA_2$ の如くおくと

$$A_1 = -B_1 + (\alpha/2)\mathrm{Ker}'\alpha, \quad A_2 = -B_2 + (\alpha/2)\mathrm{Kei}'\alpha, \quad C_1 = (\alpha/2)\mathrm{ber}'\alpha, \quad C_2 = (\alpha/2)\mathrm{bei}'\alpha \tag{5'}$$

(4) を (3) の ii) に入れて (5) 又は (5′) を用いると B_1, B_2, F_1, F_2 を定める式は

$$\left.\begin{aligned}
&B_1\,\mathrm{ber}\beta - B_2\,\mathrm{bei}\beta - F_1\,\mathrm{Ker}\mu + F_2\,\mathrm{Kei}\mu = (\alpha/2)(\mathrm{Kei}\beta\,\mathrm{bei}'\alpha - \mathrm{Ker}\beta\,\mathrm{ber}'\alpha)\\
&B_1\,\mathrm{ber}'\beta - B_2\,\mathrm{bei}'\beta - \gamma(F_1\,\mathrm{Ker}'\mu - F_2\,\mathrm{Kei}'\mu) = (\alpha/2)(\mathrm{Kei}'\beta\,\mathrm{bei}'\alpha - \mathrm{Ker}'\beta\,\mathrm{ber}'\alpha)\\
&B_1\,\mathrm{bei}\beta + B_2\,\mathrm{ber}\beta - \gamma^2(F_1\,\mathrm{Kei}\mu + F_2\,\mathrm{Ker}\mu) = (-\alpha/2)(\mathrm{Kei}\beta\,\mathrm{ber}'\alpha + \mathrm{Ker}\beta\,\mathrm{bei}'\alpha)\\
&B_1\,\mathrm{bei}'\beta + B_2\,\mathrm{ber}'\beta - \gamma^3(F_1\,\mathrm{Kei}'\mu + F_2\,\mathrm{Ker}'\mu) = (-\alpha/2)(\mathrm{Kei}'\beta\,\mathrm{ber}'\alpha + \mathrm{Ker}'\beta\,\mathrm{bei}'\alpha)
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

但し $\quad \gamma = \lambda/\rho \qquad \lambda b = \mu$

(4), (5) によって特別な点の曲げモーメントを求めると $\chi = k/k'$ として

$$\left.\begin{aligned}
M_r(r=0) &= p_0\sqrt{D\chi/k}\,(1+\nu)\{(\alpha/2)\mathrm{Kei}'\alpha - B_2)\\
M_r(r=a) &= p_0\sqrt{D\chi/k}\,\big[\alpha(\mathrm{bei}\alpha\,\mathrm{Ker}'\alpha + \mathrm{Kei}\alpha\,\mathrm{ber}\alpha) + (\nu-1)(\mathrm{Kei}\alpha\,\mathrm{bei}'\alpha - \mathrm{Ker}'\alpha\,\mathrm{ber}'\alpha)\\
&\qquad - 2B_1\{\mathrm{bei}\alpha - (\nu-1)/\alpha\cdot\mathrm{ber}'\alpha\} - 2B_2\{\mathrm{ber}\alpha + (\nu-1)/\alpha\cdot\mathrm{bei}'\alpha\}\big]\\
M_r(r=b) &= 2p_0\chi\sqrt{D/k}\,\big[F_1\{\mathrm{Kei}\mu - (\nu-1)/\mu - \mathrm{Ker}'\mu\} + F_2\{\mathrm{Ker}\mu + (\nu-1)/\mu\cdot\mathrm{Kei}'\mu\}\big]
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(7) は一様弾性路盤として求めた Reissner[1] の解を含むものである。

特別に $k' = 0$ である場合、解は explicit な形で与えられる。特定点のモーメント表示式を掲げると

$$M_r^0(r=0) = p_0\sqrt{D/k}\,\{\mu^2(1+\nu)/16n^2\}\big[\{\mu^2(\mathcal{E}_1\,\mathrm{Kei}\mu + \mathcal{E}_2\,\mathrm{Ker}\mu)/n^2\} + 4(\log n + 1/2)\big]$$

$$M_r^0(r=a) = p_0\sqrt{D/k}\,(\mu^2/16n^2)\big[(\nu-1) + \mu^2(\nu+1)(\mathcal{E}_1\,\mathrm{Kei}\mu + \mathcal{E}_2\,\mathrm{Ker}\mu)/n^2\big]$$

$$M_r^0(r=b) = p_0\sqrt{D/k}\,(\mu^2/8n^2)\big[\mathcal{E}_1\{\mathrm{Kei}\mu - (\nu-1)/\mu\cdot\mathrm{Ker}'\mu\} + \mathcal{E}_2\{\mathrm{Ker}\mu + (\nu-1)/\mu - \mathrm{Kei}'\mu\}\big]$$

但し $\quad n = b/a$

$$\mathcal{E}_1 = \big[\mu^2(1-2n^2)\mathrm{Ker}'\mu + 4n^2(\mu\,\mathrm{Ker}\mu - 2\,\mathrm{Kei}'\mu)\big]/\Delta_0$$

$$\mathcal{E}_2 = -\big[\mu^2(1-2n^2)\mathrm{Kei}'\mu + 4n^2(\mu\,\mathrm{Kei}\mu + 2\,\mathrm{Ker}'\mu)\big]/\Delta_0$$

$$\Delta_0 = \mu^4(\mathrm{Ker}'\mu\,\mathrm{Kei}\mu - \mathrm{Kei}'\mu\,\mathrm{Ker}\mu) + 2\mu^3\{(\mathrm{Kei}\mu)^2 + (\mathrm{Kei}'\mu)^2\}$$

数値計算は現在行いつゝある。

注1) E. Reissner: *Stresses in Elastic Plates over Flexible Subgrades.* Proc. A.S.C.E. No. 690 May, 1955