

V-42 流砂ある河川の動的平衡勾配について

岐阜大学工学部 正員 増田重臣

岐阜大学工学部 正員 河村三郎

1) 基礎方程式の誘導

断面を幅の広い矩形断面であると見做し流れ方向に x 軸をとリ、流水が平衡に達した状態を考えれば不変速定流であるから運動方程式と連続式は

$$\lambda = \left(1 - \frac{R_c^3}{R^3}\right) \frac{dR}{dx} - \frac{R_c^3}{B R^2} \frac{dB}{dx} + \frac{U_*^2}{gR} \text{----- (1)}, \quad Q = B R U = B_0 R_0 U_0 = \text{const.} \text{----- (2)}$$

ここに、 λ :河床勾配、 R :水深、 R_c :限界水深・ $R_c^3 = Q^2 / g B^2$ 、 B :河川幅、 g :重力の加速度、 R :径深、 U_* :摩擦速度、 Q :流量、 U :平均流速、添字 0 は $x=0$ の値を示す。

抵抗法則として次式を使用する。

$$\frac{U}{U_*} = E \left(\frac{R}{R_s} \right)^{\frac{2}{3}} \text{----- (3)}, \quad \frac{R_s}{d_s} = K \left\{ \frac{U_*^2}{\{(\alpha/\rho) - 1\} g d_s} \right\}^m \text{----- (4)}$$

ここに、 R_s :相当粗度、 d_s :平均粒径、 α :砂礫の密度、 ρ :水の密度、 $E, K, \frac{2}{3}, m$ はある常数 ($\frac{2}{3} \approx \frac{1}{6}$, $m \approx 2 \sim 3$) 流砂の運動方程式として Brown の実験式の形を使用すれば

$$\frac{g_s}{U_* d_s} = a_s \left\{ \frac{U_*^2}{\{(\alpha/\rho) - 1\} g d_s} \right\}^{\frac{1}{2}} \text{----- (5)} \quad \text{ここに、} g_s \text{:浮遊流砂量も含めた単位幅、単位時間当りの流砂量、} a_s \text{ と } \frac{1}{2} \text{ はある常数である。 (Brown の実験式では } a_s = 10, \frac{1}{2} = 2 \text{ である)} \quad \text{流砂の連続式は、ある基準面から測った河床面の高さ } z \text{ とし、流れ方向に } x \text{ 軸をとれば次式で表わされる。}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B(1-\lambda)} \frac{\partial (g_s B)}{\partial x} \text{----- (6)} \quad \text{ここに、} \lambda \text{ は空隙率 } \% \text{ を } 100 \text{ で割って示したものである。河床が時間的に変動しない、すなわち、動的な平衡状態にあるならば、} \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \text{ , ゆえに } \frac{\partial (g_s B)}{\partial x} = 0 \text{ である。この流砂の動的平衡条件から得られた流砂の連続式は} \quad Q_s = g_s B = g_{s0} B_0 = \text{const.} \text{----- (7)}$$

$$(5) \text{式より } g_s \text{ と } g_{s0} \text{ は} \quad \left. \begin{aligned} g_s &= U_*^{(1+2\frac{1}{2})} d_s^{(1-\frac{1}{2})} a_s \{(\alpha/\rho) - 1\}^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}} \\ g_{s0} &= U_{*0}^{(1+2\frac{1}{2})} d_{s0}^{(1-\frac{1}{2})} a_{s0} \{(\alpha/\rho) - 1\}_0^{\frac{1}{2}} g_0^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

(8) 式を (7) 式に代入して $\{(\alpha/\rho) - 1\} = \{(\alpha/\rho) - 1\}_0$, $g = g_0$, $a_s = a_{s0}$ であるから次式をうる。

$$\frac{U_*}{U_{*0}} = \left(\frac{B_0}{B} \right)^{\frac{1}{(1+2\frac{1}{2})}} \left(\frac{d_{s0}}{d_s} \right)^{\frac{(1-\frac{1}{2})}{(1+2\frac{1}{2})}} \text{----- (9)} \quad (9) \text{式の摩擦項は、(9)式を代入して } U_{*0}^2 = g R_0 I_0, (R_0/R) = (R_0/R) \text{ とおけばつぎの如くなる。}$$

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left(\frac{R_0}{R} \right) \left(\frac{B_0}{B} \right)^{\frac{2}{(1+2\frac{1}{2})}} \left(\frac{d_{s0}}{d_s} \right)^{\frac{(2-2\frac{1}{2})}{(1+2\frac{1}{2})}} \text{----- (10)} \quad (R_0/R) \text{ を求めるために、(3)式と(4)式から } U \text{ と } U_0 \text{ を求めると}$$

$$\left. \begin{aligned} U &= U_*^{(1-2m\frac{2}{3})} E R^{\frac{2}{3}} K^{-\frac{2}{3}} d_s^{(m-1)\frac{2}{3}} \{(\alpha/\rho) - 1\}^{\frac{m\frac{2}{3}}{3}} g^{\frac{m\frac{2}{3}}{3}} \\ U_0 &= U_{*0}^{(1-2m\frac{2}{3})} E_0 R_0^{\frac{2}{3}} K_0^{-\frac{2}{3}} d_{s0}^{(m-1)\frac{2}{3}} \{(\alpha/\rho) - 1\}_0^{\frac{m\frac{2}{3}}{3}} g_0^{\frac{m\frac{2}{3}}{3}} \end{aligned} \right\} \text{----- (11)}$$

(11) 式を (2) 式に代入して $\{(\alpha/\rho) - 1\} = \{(\alpha/\rho) - 1\}_0$, $g = g_0$, $E = E_0$, $K = K_0$, $(R_0/R) = (R_0/R)$ であるから

$$\frac{U_*}{U_{*0}} = \left(\frac{B_0}{B} \right)^{\frac{1}{(1-2m\frac{2}{3})}} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{\frac{(1-\frac{2}{3})}{(1-2m\frac{2}{3})}} \left(\frac{d_{s0}}{d_s} \right)^{\frac{(m\frac{2}{3}-\frac{2}{3})}{(1-2m\frac{2}{3})}} \text{----- (12)}$$

(9) 式と (12) 式により (U_*/U_{*0}) を消去して

$$\frac{h_0}{h} = \left(\frac{B}{B_0}\right)^{\frac{(2mg+2p)}{(1+2p)(1+g)}} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{\frac{(3mg-2p-2g+p-1)}{(1+2p)(1+g)}} \text{----- (13)}$$

(13) 式を(10)式に代入して整理すれば「摩擦項はつき」の如くになる。

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^b \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^f \text{----- (14)} \quad \text{ここに, } b = \frac{(2mg-2g+2p-2)}{(1+2p)(1+g)}, \quad f = \frac{(3mg-3g+3p-3)}{(1+2p)(1+g)}$$

同様に, (13)式は $\frac{h_0}{h} = \left(\frac{B}{B_0}\right)^k \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^j \text{----- (13)'}$ ことに, $k = \frac{(2mg+2p)}{(1+2p)(1+g)}, \quad j = \frac{(3mg-3g+3p-3)}{(1+2p)(1+g)}$

(13)'式を x で微分して $\frac{dh}{dx} = -h_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^{-k} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{-j} \left\{ \frac{k}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right\} \text{----- (15)}$

(13)', (14), (15) の諸式を(1)式に代入して, 動的平衡勾配 λ に関する基礎方程式を得る。

$$\lambda = I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^b \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^f - h_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^{-k} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{-j} \left\{ \frac{k}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right\} + \frac{h_c^3}{h_0^2} \left(\frac{B}{B_0}\right)^{-2k} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{-2j} \left\{ \frac{(k-1)}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right\} \text{----- (16)}$$

基礎方程式において $B(x)$, $d_s(x)$ の関数形が与えられれば λ を求めることができる。

河床高 Z は, $\lambda = -dz/dx$ であるから次式で与えられる。 $Z = Z_0 - \int_0^x \lambda dx \text{----- (17)}$

[2] 幅が $B = B_0 e^{ax}$ にて漸変する場合 e^{ax} の a は $x > 0$ に行くに1となる。幅が拡大する場合に $a > 0$, 縮小する場合に $a < 0$ である。粒径 d_s は, 河道を流下するに1となる。 $d_s = d_{s0} e^{-cx}$ にて変化するとする。 (18)

$$h_c^3 = h_{c0}^3 e^{-2ax}, \quad h_{c0}^3 = Q^2/gB_0^2, \quad dB/dx = aB_0 e^{ax}, \quad B = B_0 e^{ax}, \quad d_s = d_{s0} e^{-cx}, \quad dd_s/dx = -cd_{s0} e^{-cx} \text{----- (18)}$$

(18)式を(16)式に代入して λ をうる。この求めた λ を(17)式に代入して Z をうる。

$$\lambda = I_0 e^{(ab-cf)x} + (cf-ak) h_0 e^{(cf-ak)x} + (h_{c0}^3/h_0^2)(ak-cf-a) e^{(2ak-2cf-2a)x} \text{----- (19)}$$

$$Z = Z_0 - \frac{I_0}{(ab-cf)} \left[e^{(ab-cf)x} - 1 \right] - h_0 \left[e^{(cf-ak)x} - 1 \right] - \frac{h_{c0}^3}{2h_0^2} \left[e^{(2ak-2cf-2a)x} - 1 \right] \text{----- (20)}$$

ここに, $(ab-cf) \neq 0, \quad (cf-ak) \neq 0, \quad (ak-cf-a) \neq 0$

[3] 幅が $B = B_0(1+gx)^\beta$ にて漸変する場合 g, β は幅の変化によって決る常数であつて, g は $x > 0$ に行くに1となる。幅が拡大する場合に $g > 0$, 縮小する場合に $g < 0$ である。

なお, $\beta = 1$ のときは幅が直線的に漸変する場合であり, $g = 0, \beta = 0$ のときは幅が一定の場合である。

$$B = B_0(1+gx)^\beta, \quad dB/dx = B_0\beta g(1+gx)^{\beta-1}, \quad h_c^3 = h_{c0}^3(1+gx)^{-2\beta}, \quad d_s = d_{s0} e^{-cx}, \quad dd_s/dx = -cd_{s0} e^{-cx} \text{----- (21)}$$

(21)式を(16)式に代入して λ をうる。この求めた λ を(17)式に代入して Z をうる。

$$\lambda = I_0(1+gx)^{\beta b} e^{-cfx} + h_0 \left\{ (cf-\beta g h_0(1+gx)^{-1}) (1+gx)^{-\beta k} e^{cfx} - (h_{c0}^3/h_0^2)(cf-\beta g h_0(1+gx)^{-1}) (1+gx)^{(2\beta k-2\beta)} e^{-2cfx} \right\} \text{----- (22)}$$

$$Z = Z_0 + \int_0^x \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} \left\{ (cf-\beta g h_0(1+gx)^{-1}) (1+gx)^{(2\beta k-2\beta)} e^{-2cfx} dx - \int_0^x (1+gx)^{\beta b} e^{-cfx} dx \right\} \text{----- (23)}$$

上式は, 一般に積分ができてゐる。この場合の河床高は(22)式で λ を求め, この λ と x をおよび $x=0$ の元の Z_0 を使用して求めればよい。

(4) 幅が一定の場合 (22)式において $\xi=0$, $\rho=0$ とおけばこの場合の λ をうる

$$\lambda = I_0 e^{-cfx} + c\bar{f}h_0 e^{cfx} - c\bar{f}(h_{c0}^3/h_0^2) e^{-2cfx} \quad \text{----- (24)}$$

(24)式は(19)式において $a=0$ とおいてもえられる。河床高 z は, $\xi=0$, $\rho=0$ を(23)式に代入し積分すればえられる。 $z = z_0 + \frac{I_0}{cf} [e^{-cfx} - 1] - h_0 [e^{cfx} - 1] - \frac{h_{c0}^3}{2h_0^2} [e^{-2cfx} - 1] \quad \text{--- (25)}$

(25)式は(20)式において $a=0$ とおいてもえられる。

(5) 河道を微小区間に分割し, その区間の河床高の差を求めろ方法 $\lambda = -dz/dx$

であるから基礎方程式(16)式を使用し計算しようとしてこの区域を n 個の区間に分割し, この分割した, ある一つの Δx_η 区間における河床高の差 Δz_η は, 次の如く表示しよう。

$$\Delta z_\eta = -I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^b \left(\frac{ds}{ds_0}\right)_m^f \Delta x_\eta + h_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{\bar{f}} \left(\frac{ds}{ds_0}\right)_m^{\bar{f}} \left\{ h \left(\frac{B}{B_0}\right)_m \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) + \bar{f} \left(\frac{ds}{ds_0}\right)_m \left(\frac{\Delta ds}{ds_0}\right) \right\} \\ + \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{2\bar{f}} \left(\frac{ds}{ds_0}\right)_m^{2\bar{f}} \left\{ (1-h) \left(\frac{B}{B_0}\right)_m \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) - \bar{f} \left(\frac{ds}{ds_0}\right)_m \left(\frac{\Delta ds}{ds_0}\right) \right\} \quad \text{----- (26)}$$

ここに, 添字 m は Δx_η 区間における平均値を示し, ΔB および Δds は Δx_η の両端の B および ds の差である。 ΔB は $x>0$ に行くに 1 が断面が拡大する場合に $\Delta B>0$, 縮小する場合に $\Delta B<0$ である。 Δds は $x>0$ に行くに 1 が粒径が減少する場合に $\Delta ds<0$, 増加する場合に $\Delta ds>0$ である。 h_{cm}^3 は $h_{cm}^3 = Q^2/8B_m^2$ とえられた。 n 個に分割した η の区間における河床高 z_η は $z_\eta = z_0 + \sum_{\eta=0}^{\eta} \Delta z_\eta \quad \text{----- (27)}$ ($\eta=0, 1, 2, \dots, n, \Delta z_0=0$)

n 個に分割した最後の $\Delta x_\eta=n$ の区間における $(ds/ds_0)_m$ は $(ds/ds_0)_m \div 1$ であるから, 流下に伴う粒径の変化が少ないうちでは, 次の如く表示しよう。

$$\Delta z_\eta = -I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^b \Delta x_\eta + h_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{(\bar{f}+1)} \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) + (1-h) \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{(2\bar{f}-1)} \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) \quad \text{----- (28)}$$

(6) $b, f, \bar{f}, h$ の値 $b, f, \bar{f}, h$ の値は, $\bar{f}=2, f=1, b$ を使用すると与えられるべき

$$\text{の如くなる。} \quad \left. \begin{aligned} b &= \frac{(2m\bar{f}-2\bar{f}+2\bar{f}-2)}{(1+2\bar{f})(1+\bar{f})} = \frac{(2m+10)}{35}, & f &= \frac{(3m\bar{f}-3\bar{f}+3\bar{f}-3)}{(1+2\bar{f})(1+\bar{f})} = \frac{(3m+15)}{35} \\ \bar{f} &= \frac{(3m\bar{f}-2\bar{f}-\bar{f}+\bar{f}-1)}{(1+2\bar{f})(1+\bar{f})} = \frac{(3m+1)}{35}, & h &= \frac{(2m\bar{f}-2\bar{f})}{(1+2\bar{f})(1+\bar{f})} = \frac{(2m+2\bar{f})}{35} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (29)}$$

$m=2$ を使用するときは, $b=2/5, f=3/5, \bar{f}=1/5, h=4/5$ となる。

(7) 基準床における水面勾配 I_0 の決定方法 基準床における I_0 は, 動的平衡の条件が河道のいずれの断面においても Q_s が算出されることを必要としていられる。動的平衡の条件から得られる連続式(17)式を満足する Q_s を求めろべきである。基準床は河床が変動しないところである。 I_0 は一般に次式で表わす。 $I_0 \div \varepsilon \left[2 + \left(\frac{B_0}{h_0}\right) \right] Q_s^{\frac{2}{1+2\bar{f}}}, \quad \varepsilon = \frac{1}{B_0} \left[\frac{ds_0^{(\bar{f}-1)} \{ (Q/P) - 1 \}_0^{\bar{f}}}{ds_0 B_0 g^{1/2}} \right]^{\frac{2}{1+2\bar{f}}} = \text{const.} \quad \text{--- (30)}$

Brown の実験式における $\bar{f}=2, B_0=10$ を代入すると

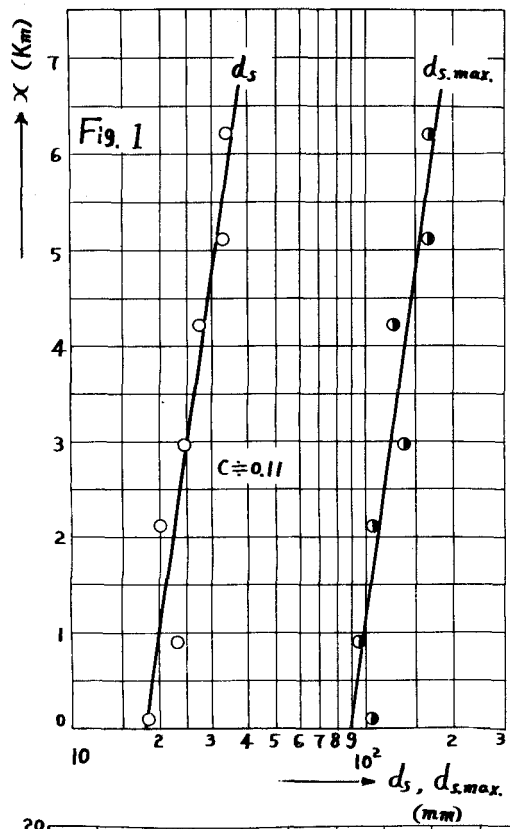
$$I_0 \div \varepsilon \left[2 + \left(\frac{B_0}{h_0}\right) \right] Q_s^{2/5}, \quad \varepsilon = \frac{1}{B_0} \left[\frac{ds_0 \{ (Q/P) - 1 \}_0^2}{10 B_0 g^{1/2}} \right]^{2/5} = \text{const.} \quad \text{--- (31)}$$

(31)式における Q_s の決定方法は, まず最初に, 計算しようとする流量 Q に対応する各地

床の流量 $Q_{s\eta}$ を求める。流量 Q を計画洪水流量にとるときは、 Q_s を計画床流量と呼ぶことにする。任意の地点における $Q_{s\eta}$ は (1) 式と (2) 式のより

$$Q_{s\eta} = \frac{a_s B U_*^{(1+2p)}}{g^2 d_s^{(p-1)} \{(a/p)-1\}} \quad \text{--- (32)}, \quad U_* \text{ は次式で与える。 } U_* = \frac{Q}{B R} \left[6.0 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{R}{d_{65}} \right) \right]^{-1} \quad \text{--- (33)}$$

Brown の実験式における $p=2, a_s=10$ を代入すると $Q_{s\eta} = \frac{10 Q^5}{g^2 d_s \{(a/p)-1\}^2 B^2 R^5} \left[6.0 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{R}{d_{65}} \right) \right]^{-5} \quad \text{--- (34)}$



(34) 式を使用し、各地点の $Q_{s\eta}$ を求める、つぎに、これら各地点の $Q_{s\eta}$ の平均値を求め、この $Q_{s\eta}$ の平均値を Q_s とする。ゆえに、この Q_s を使用し (2) 式により I_0 を求める。講演のとき Fig. 1, 2 を使用して計算例を述べる予定である。

本研究にあり、京都大学防災研究所 石原安雄博士に終始御指導を頂いた。ここに厚く御礼申し上げます。

の計算
Fig. 2 に使用した諸量は $Q=1200 \text{ m}^3/\text{sec}$, $R_0=2.76 \text{ m}$, $B_0=137 \text{ m}$, $Z_0=4.22 \text{ m}$, $(a/p)=2.585$, $d_{65}=0.018 \text{ mm}$, $Q_s=0.29 \text{ m}^3/\text{sec}$, $I_0=0.00235$, $C=0.11 \text{ Km}^{-1}$, $m=2$ を使用した。

