

V-41 河川の静的平衡勾配について

岐阜大学工学部 正員 増田重臣

岐阜大学工学部 正員 河村三郎

(1) 基礎方程式の誘導

限界掃流力に関する実験公式は古くから数多くのものが提案されているが砂礫移動開始の機構を理論的に取り扱ったものは非常に少なく C.M. White, 栗原博士, 岩垣博士のものがあつてである。ここでは岩垣公式^Dを使用することとする。岩垣公式は、一般に下記の如く示しうす。

$$U_{*c}^2 = \frac{\tau_c}{\rho} = a_c \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) - 1 \right\} g d_s \quad \text{--- (1)}$$

ここに、 d_s : 平均粒径、 ρ : 砂礫の密度、 ρ : 水の密度、 g : 重力の加速度、 τ_c : 底面の限界摩擦応力、 a_c : $U_{*c} d_s / \nu$ の値によって決定する定数である。 $(\nu$: 動粘性係数) この a_c の決定は、岩垣博士^Dの $U_{*c}^2 / \{(\rho/\rho) - 1\} g d_s$ と $U_{*c} d_s / \nu$ との関係を表わした Fig. 1 を使用して決定する。

静的平衡状態にある河川では任意の2地点間でつぎの関係が成り立つ

$$\frac{\tau_c}{\tau_{c0}} = \frac{\rho U_{*c}^2}{\rho_0 U_{*c0}^2} = \frac{\rho U_{*c}^2}{\rho_0 U_{*c0}^2} = \frac{\rho a_c \{(\rho/\rho) - 1\} g d_s}{\rho_0 a_{c0} \{(\rho_0/\rho_0) - 1\} g_0 d_{s0}} \quad \text{添字0は基準値を示してゐる。}$$

上式において $\rho = \rho_0$, $g = g_0$, $\{(\rho/\rho) - 1\} = \{(\rho_0/\rho_0) - 1\}$ であるから

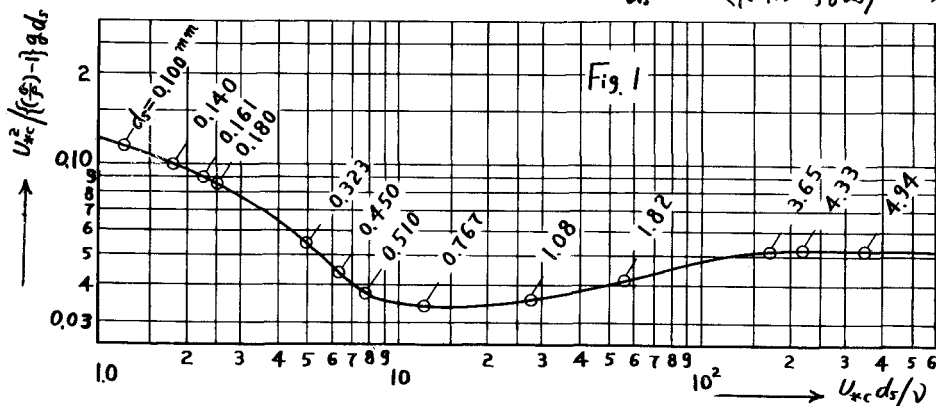
$$\left(\frac{U_{*c}}{U_{*c0}} \right)^2 = \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right) \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right) \quad \text{--- (2)}$$

流水が平衡に達した状態を考えれば、不等速定流であるから運動方程式と連続式は、流れ方向に x 軸をとり断面を幅の広い矩形断面と見做せば

$$\lambda = \left(1 - \frac{R_c^3}{R^3} \right) \frac{dR}{dx} - \frac{R_c^3}{B R^2} \frac{dB}{dx} + \frac{U_{*c}^2}{g R} \quad \text{--- (3)}, \quad Q = B R U = B_0 R_0 U_0 = \text{const.} \quad \text{--- (4)}$$

ここに、 λ : 河床勾配、 R : 水深、 R : 径深、 U : 平均流速、 U_{*c} : 摩擦速度、 R_c : 限界水深 ($R_c^3 = Q^2 / g B^2$) B : 河川幅。抵抗法則として(5)式を使用し(3)式の運動方程式を解く場合非常に複雑であるから (R/R_c) のある範囲内では(5)式に近似した式として(6)式を使用する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_{*c}} &= 6.0 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{R}{R_c} \right) \quad \text{--- (5)}, & \frac{U}{U_{*c}} &= E \left(\frac{R}{R_c} \right)^{\frac{2}{3}} \\ & & \frac{R}{d_s} &= K \left\{ \frac{U_{*c}^2}{\{(\rho/\rho) - 1\} g d_s} \right\}^m \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (6)}$$



ここに、 E, K, g, m はある定数である。 $(g \div 1/6)$ あり、 m の値は掃流力が限界掃流力以下であれば砂礫は移動せず固定床における抵抗を示すか

は $m=0 \sim 1$ である。普通 $m=0 \times 1$ である。すなわち $R_s = K d_s \div d_{65}$ を用いて d_{65} は通過率 65% に相当する粒径である。(3) 式の摩擦項は (2) 式を使用して $U_0^2 = g R_0 I_0$, $(R_0/R) = (R_0/h)$ とおけば

$$\frac{U_0^2}{gR} = I_0 \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right) \left(\frac{R_0}{R} \right) \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right) \text{----- (7)}$$

(R_0/h) を求めるために (6) 式

$$\begin{aligned} U &= U_0^{(1-2m/8)} E R^2 K^{-2} d_s^{(m-1)/8} \{ (a/P) - 1 \}^{m/8} g^{m/8} \\ U_0 &= U_0^{(1-2m/8)} \cdot E_0 R_0^2 K_0^{-2} d_{s0}^{(m-1)/8} \{ (a_0/P) - 1 \}^{m/8} g_0^{m/8} \end{aligned} \text{----- (8)}$$

(8) 式を (4) 式に代入して, $\{ (a/P) - 1 \} = \{ (a_0/P) - 1 \}$, $g = g_0$, $E = E_0$, $K = K_0$, $(R_0/R) = (R_0/h)$ であるから

$$\frac{U_0}{U_{00}} = \left(\frac{B_0}{B} \right)^{\frac{1}{1-2m/8}} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{\frac{1+8}{1-2m/8}} \left(\frac{d_{s0}}{d_s} \right)^{\frac{m/8-2}{1-2m/8}} \text{----- (9)}$$

(2) 式と (9) 式により (U_0/U_{00}) を消去して

$$\frac{R_0}{R} = \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{\frac{(1-2m/8)}{2(1+8)}} \left(\frac{B}{B_0} \right)^{\frac{1}{1+8}} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{\frac{(1-2/8)}{2(1+8)}} \text{----- (10)}$$

(10) 式を (7) 式に代入して整理すれば

$$\frac{U_0^2}{gR} = I_0 \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)^M \left(\frac{B}{B_0} \right)^r \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^l \text{----- (11)}$$

$$\text{すなわち, } M = \frac{(3+2/8-2m/8)}{2(1+8)}, \quad r = \frac{1}{(1+8)}, \quad l = \frac{3}{2(1+8)}, \quad \text{同様 } (10) \text{ 式は}$$

$$\frac{R_0}{R} = \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)^p \left(\frac{B}{B_0} \right)^r \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^\lambda \text{----- (12)}, \quad \text{すなわち, } p = \frac{(1-2m/8)}{2(1+8)}, \quad \lambda = \frac{(1-2/8)}{2(1+8)}$$

$$(12) \text{ 式を } x \text{ で微分して } \frac{dR}{dx} = -R_0 \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{-p} \left(\frac{B}{B_0} \right)^{-r} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{-\lambda} \left[\frac{p}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{r}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \text{----- (13)}$$

(11) 式, (12) 式, (13) 式の関係を (3) 式に代入して静的平衡勾配 λ に関する基礎方程式をうる。

$$\begin{aligned} \lambda &= I_0 \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)^M \left(\frac{B}{B_0} \right)^r \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^l - R_0 \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{-p} \left(\frac{B}{B_0} \right)^{-r} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{-\lambda} \left[\frac{p}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{r}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \\ &+ \frac{R_0^2}{R^2} \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{2p} \left(\frac{B}{B_0} \right)^{2r} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{2\lambda} \left[\frac{p}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{(r-1)}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \end{aligned} \text{----- (14)}$$

(14) 式において $a_c(x)$, $B(x)$, $d_s(x)$ の関数形が与えられれば静的平衡勾配 λ を求めることができる。計算上より $1 \sim 2$ mm の区域内の d_s は $d_s \leq 3$ mm であるから河川では, Fig. 1 からわかるように $a_c = a_{c0}$ であるから (14) 式はつぎの如くとなる。

$$\lambda = I_0 \left(\frac{B}{B_0} \right)^r \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^l - R_0 \left(\frac{B}{B_0} \right)^{-r} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{-\lambda} \left[\frac{p}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] + \frac{R_0^2}{R^2} \left(\frac{B}{B_0} \right)^{2r} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{2\lambda} \left[\frac{(r-1)}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \text{----- (15)}$$

$d_s \leq 3$ mm である, (a_c/a_{c0}) の最大値が $(0.139/0.034) \approx 4.1$ であるから, M の値が $m=0$ のとき $M=10/7$ であるから, λ の値の 90% 程度を占める (14) 式の第 1 項は大きな影響を受けたことになる。ゆえに, $d_s \leq 3$ mm において十分注意せねばならない。

$$\text{河床高 } Z \text{ は, } \lambda = -dz/dx \text{ であるから次式で与えられる。 } Z = Z_0 - \int \lambda dx \text{----- (16)}$$

つぎに述べる [2] ~ [5] における λ の計算方法は動的平衡の場合と同様である。

[2] 幅が $B = B_0 e^{ax}$ に変化する場合 ($a_c = a_{c0}$, $d_s = d_{s0} e^{-cx}$)

$$\lambda = I_0 e^{(ar-cl)x} + (c\lambda - ar) R_0 e^{(c\lambda-ar)x} + \frac{R_0^3}{R^2} (ar-cl-a) e^{(2ar-2cl-2a)x} \text{----- (17)}$$

$$(ar-cl) \neq 0, \quad (c\lambda-ar) \neq 0, \quad (ar-cl-a) \neq 0$$

$$Z = Z_0 - \frac{I_0}{(ar-cl)} \left[e^{(ar-cl)x} - 1 \right] - h_0 \left[e^{(cl-ar)x} - 1 \right] - \frac{h_{c0}^3}{2h_0^2} \left[e^{(2ar-2cl-2a)x} - 1 \right] \text{----- (18)}$$

[3] 幅が $B=B_0(1+\xi x)^p$ に τ 漸変する場合 ($a_c=a_{c0}$, $d_s=d_{s0}e^{-cx}$)

$$\lambda = I_0(1+\xi x)^{pr}e^{-clx} + h_0 \left[c\lambda - pr\xi(1+\xi x)^{-1} \right] (1+\xi x)^{-pr}e^{clx} \\ - \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} \left[c\lambda - (r-1)\xi(1+\xi x)^{-1} \right] (1+\xi x)^{(2pr-2p)}e^{-2clx} \text{----- (19)}$$

$$Z = Z_0 + \int_0^x \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} \left[c\lambda - (r-1)\xi(1+\xi x)^{-1} \right] (1+\xi x)^{(2pr-2p)}e^{-2clx} dx \\ - \int_0^x h_0 \left[c\lambda - pr\xi(1+\xi x)^{-1} \right] (1+\xi x)^{-pr}e^{clx} dx - \int_0^x I_0(1+\xi x)^{pr}e^{-clx} dx \text{----- (20)}$$

[4] 幅が一定の場合 ($a_c=a_{c0}$, $d_s=d_{s0}e^{-cx}$)

$$\lambda = I_0e^{-clx} + c\lambda h_0e^{clx} - \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} c\lambda e^{-2clx} \text{----- (21)}$$

$$Z = Z_0 + \frac{I_0}{cl} \left[e^{-clx} - 1 \right] - h_0 \left[e^{clx} - 1 \right] - \frac{h_{c0}^3}{2h_0^2} \left[e^{-2clx} - 1 \right] \text{----- (22)}$$

[5] 河道を微小区間に分割し、その区間の河床高の差から求める方法

計算1より17の区域を n 個の区間に分割した場合、この分割1区間における河床高の差 ΔZ_η は

$$\Delta Z_\eta = -I_0 \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)_m^p \left(\frac{B}{B_0} \right)_m^r \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)_m^l \Delta x_\eta + h_0 \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)_m^{-p} \left(\frac{B}{B_0} \right)_m^{-r} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)_m^{-l} \left[\varphi \left(\frac{a_{c0}}{a_c} \right)_m \left(\frac{\Delta a_c}{a_{c0}} \right) + \lambda \left(\frac{d_{s0}}{d_s} \right)_m \left(\frac{\Delta d_s}{d_{s0}} \right) + r \left(\frac{B_0}{B} \right)_m \left(\frac{\Delta B}{B_0} \right) \right] \\ - \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} \left(\frac{a_c}{a_{c0}} \right)_m^{2p} \left(\frac{B}{B_0} \right)_m^{2r} \left(\frac{d_s}{d_{s0}} \right)_m^{2l} \left[\varphi \left(\frac{a_{c0}}{a_c} \right)_m \left(\frac{\Delta a_c}{a_{c0}} \right) + (r-1) \left(\frac{B_0}{B} \right)_m \left(\frac{\Delta B}{B_0} \right) + \lambda \left(\frac{d_{s0}}{d_s} \right)_m \left(\frac{\Delta d_s}{d_{s0}} \right) \right] \text{----- (23)}$$

η の奥における河床高 Z_η は

$$Z_\eta = Z_0 + \sum_{\eta=0}^{\eta} \Delta Z_\eta \text{----- (24)} \quad \eta = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \Delta Z_0 = 0$$

Δa_c は $d_s \geq 3mm$ では $\Delta a_c = 0$, $(a_c/a_{c0}) = 1$ である。 $d_s \leq 3mm$ では、 $x > 0$ に行くと a_c が減少する場合に $\Delta a_c < 0$, 増加する場合に $\Delta a_c > 0$ である。他の符号は動的平衡の場合と同である。計算区域内の d_s が $d_s \geq 3mm$ であり、(これを n 個に分割し、最後の $\Delta x_\eta = n$ の区間における $(d_s/d_{s0})_m$ が $(d_s/d_{s0})_m \neq 1$ であるような経路変化が小さい河川では

$$\Delta x_\eta = -I_0 \left(\frac{B}{B_0} \right)_m^r \Delta x_\eta + r h_0 \left(\frac{B}{B_0} \right)_m^{-(r+1)} \left(\frac{\Delta B}{B_0} \right) + \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} (1-r) \left(\frac{B}{B_0} \right)_m^{(2r-1)} \left(\frac{\Delta B}{B_0} \right) \text{----- (25)}$$

[6] $r, \mu, l, \varphi, \lambda$ の値

$r, \mu, l, \varphi, \lambda$ の値は $\theta = 1/6$ を用いてそれぞれ次の如くである。

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{1}{(1+\theta)} = \frac{6}{7}, \quad l = \frac{3}{2(1+\theta)} = \frac{9}{7}, \quad \lambda = \frac{(1-2\theta)}{2(1+\theta)} = \frac{2}{7} \\ \mu &= \frac{(3+2\theta-2m\theta)}{2(1+\theta)} = \frac{(10-m)}{7}, \quad \varphi = \frac{(1-2m\theta)}{2(1+\theta)} = \frac{(3-m)}{7} \end{aligned} \right\} \text{----- (26)}$$

$m=0$ では、 $\varphi = \frac{3}{7}$, $\mu = \frac{10}{7}$ である

[7] 従来の式との比較

1) 物部博士の式 物部博士は幅が一定の場合について次式を提案した。

$$Z = Z_0 + \frac{Z}{c} I_0 \left[e^{-\frac{c}{2}x} - 1 \right] - h_0 \left[e^{\frac{c}{2}x} - 1 \right] \text{----- (27)}$$

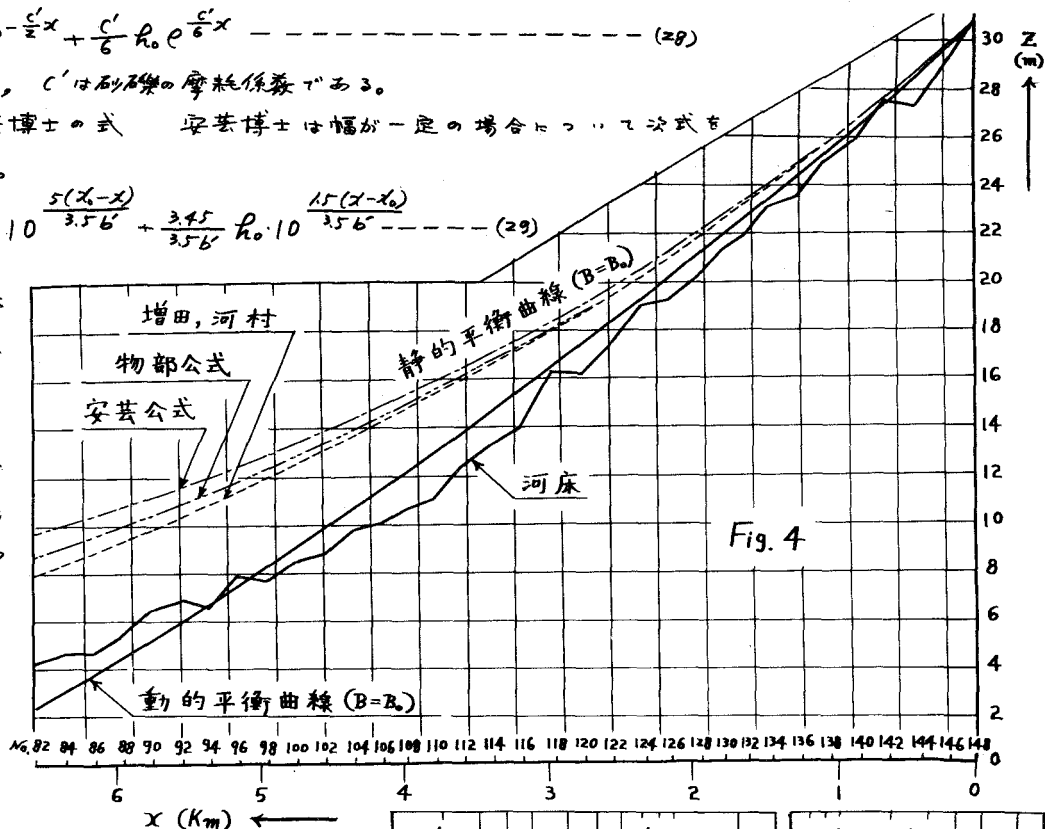
$$\lambda = I_0 e^{-\frac{C'}{6}x} + \frac{C'}{6} R_0 e^{\frac{C'}{6}x} \text{ --- (28)}$$

$C' \div 3C$, C' は砂礫の摩擦係数である。

2) 安芸博士の式 安芸博士は幅が一定の場合について次式を提案した。

$$\lambda = I_0 \cdot 10^{\frac{5(x-x_0)}{3.5b'}} + \frac{3.45}{3.5b'} R_0 \cdot 10^{\frac{1.5(x-x_0)}{3.5b'}} \text{ --- (29)}$$

(29) 式は
我々の式
と比較す
るために
つぎのこ
とく変形
して表わ
すことも
できる。



$$\lambda = I_0 e^{\frac{5(x-x_0)}{3.5b' \log e}} + \frac{3.45}{3.5b'} R_0 e^{\frac{1.5(x-x_0)}{3.5b' \log e}} \text{ --- (30)}$$

安芸博士は河床高Zに関する式を
求めてゐるから、我々の式と比
較するために $x_0=0$ とおきZに
関する式を誘導すると

$$Z = Z_0 + \frac{3.5b'}{11.51} I_0 \left[e^{-\frac{11.51}{3.5b'}x} - 1 \right] - R_0 \left[e^{-\frac{3.45}{3.5b'}x} - 1 \right] \text{ --- (31)}$$

本研究にあたり、京都大学防災
研究所 石原安雄博士に終始御指
導を頂いた。ここに厚く御礼申し
上げます。

1) 岩垣雄一：限界掃流力に関する
基礎的研究，土木学会論文集
第41号，1956。

