

V-17 構造力学と副座標

日新調査設計事務所 正員

石川 時 信

要 旨 天体力学も構造力学も副座標を用うれば其の結果は良好で極めて精度の高い結果がえられ、前者はその計算手順が面倒であるに反し後者は逆に極めて計算手順が極めて簡易であることの実例を示し、今後は一日も早く構造力学に副座標を用うることを周知徹底せしめることが現下の最緊急の要務であると述べたものである。

1. 荷重項を求める例

図-1 のように部分等分布荷重 P の両端を x 軸の原点 O_1, O_2 とする副座標 λ, τ を設くときは DB 区間の一点 E における曲げモーメント M は、

$$M = M_A + V_A x - \frac{1}{2} P \lambda^2 + \frac{1}{2} P \tau^2$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M_A x + \frac{1}{2} V_A x^2 - \frac{1}{6} P (\lambda^3 - \tau^3) \dots\dots (1)$$

$$EI y = \frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6} V_A x^3 - \frac{1}{24} P (\lambda^4 - \tau^4) \dots\dots (2)$$

式(1)は(2)は右端 B において、

$$M_A l + \frac{1}{2} V_A l^2 - \frac{1}{6} P (d^3 - b^3) = 0 \dots\dots (3)$$

$$\frac{1}{6} M_A l^2 + \frac{1}{6} V_A l^3 - \frac{1}{24} P (d^4 - b^4) = 0 \dots\dots (4)$$

式(3) $\times l/3$ を式(4)より減ずれば、 V_A は消去せられ、

$$\frac{1}{6} M_A l^2 - \frac{1}{24} P \{ 3(d^4 - b^4) - 4(d^3 - b^3)l \} = 0$$

本式より、

$$M_A = \frac{1}{12} \frac{P}{l^2} \{ 3(d^4 - b^4) - 4(d^3 - b^3)l \} \dots\dots (5)$$

M_B は式(5)の d, b を替うるに a, c を以てすればよく、

$$M_B = \frac{1}{12} \frac{P}{l^2} \{ 3(a^4 - c^4) - 4(a^3 - c^3)l \} \dots\dots (6)$$

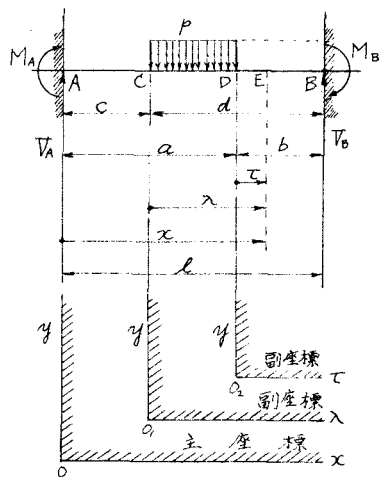
荷重 C_{ab}, C_{ba} は M_A, M_B の負号と採る例があるから、本誌掲載の文字の順序をその如くとすれば、

$$C_{ab} = -\frac{1}{12} \frac{P}{l^2} \{ 3(d^4 - b^4) - 4(d^3 - b^3)l \} \dots\dots (7)$$

$$C_{ba} = -\frac{1}{12} \frac{P}{l^2} \{ 3(a^4 - c^4) - 4(a^3 - c^3)l \} \dots\dots (8)$$

である、 $C_{ab} = \frac{1}{12} \frac{P}{l^2} \{ 3(b^4 - d^4) - 4(b^3 - d^3)l \}$, $C_{ba} = \frac{1}{12} \frac{P}{l^2} \{ 3(c^4 - a^4) - 4(c^3 - a^3)l \}$ とする方が慣習的である。

図-1 荷重と副座標



2. 弦の振動を求むる例

図-2 に示すように弦の振幅 y を Fourier 級数に従つて級数組として表わせば、位置 x , 時刻 t において、

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi \alpha t}{2} \dots \dots (1)$$

ただし常数 a_n を図-2 に従つて次のように假定する。

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 h x \sin \frac{n\pi x}{4} dx - \int_0^1 2h\lambda \sin \frac{n\pi \lambda}{2} d\lambda \quad (n=1,2,\dots) \\ &= h \left[-\frac{4}{n\pi} \left(x \cos \frac{n\pi x}{4} - \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{4} \right) \right]_0^2 - \left[\frac{2}{n\pi} \left(x \cos \frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right) \right]_0^1 \\ &= h \left[-\frac{4}{n\pi} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] + 2h \left[\frac{2}{n\pi} \left(1 \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] \\ &= \left[-\frac{4h}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right] \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

本式最下段の第一項は $n=2,4,\dots$ の場合は 0 となり消えるゆゑに、

$$a_n = \frac{8h}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \dots \dots (n=1,3,\dots) \dots \dots (2)$$

となす。次に式(2)の a_n を式(1)の a_n に代入すれば、

$$\begin{aligned} y &= \sum \frac{8h}{n^2\pi^2} \frac{1}{\alpha^2} \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi \alpha t}{2} \quad (n=1,3,\dots) \\ &= \frac{8h}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi \alpha t}{2} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{3\pi \alpha t}{2} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{2} \cos \frac{5\pi \alpha t}{2} - \dots \right] \dots \dots (3) \end{aligned}$$

本式において $t=0, x=1$ とすれば弦の中央における初期振幅 $y=h$ がえられ、また $t=0, x=0$ とすれば、弦の右端の初期振幅 $y=0$ がえられて図-2 の通りとなる。

結論

以上は例として甚だ簡単であるが例 1 の Wilson 式の荷重項を求める場合の如きは正に三才の童子といへども能くするといふ位に簡易であり形も極めて整然として形そのものが推論の状態を表はしてゐる。このように方法ならば変断面の場合のラーメン公式を得ることも極めて平易である。

また例 20 場合も常数 a_n を決定するに於て積分計算の際の下限界が常に 0 であり消失項が出来る場合が増え従つて算式が非常に省略される。

このように従来のように πy の第一座標^(標)を一切を表現しようとする、兎角連立方程式を度々解くことにより論旨が不明になることがなく最初から最後まで端旨を明らかに部懐しなかつた簡易な計算を進めし直ちに結果に到達するゆゑに誤謬に陥る怖れもなく安心と勇氣とを以つて構造力学の領域が広得られ応用も広く信頼出来る設計計算が平易迅速に出来る。特に変断面部材がある時はラーメン計算には絶対に必要の場合が多い。文献省略。

図-2 弦と副座標

