V—12　異方性弾性地山における坑道周辺の応力及び変形状態について

熊本大学　正員　川本眺万

従来より坑道周辺応力，変形状態については地山を等方等質の弾性体と見做した研究が多く行われて来ているが，ここではさらに実際的な岩石及び地層の性状を考慮し，とくに成層状態に伴う地山の弾性性質の異方性がいかに坑道応力及び変形に影響を及ぼすかについて理論的に考察を行った。

(1)　坑道周辺応力状態について

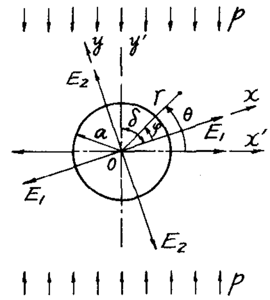

図-1

いま図-1のごとく座標軸を弾性対称軸に選ぶと，応力関数Fはつぎのような適合条件式を満足しなければならない。

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2a_{11} + a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \qquad (1)$$

ここで　$a_{11} = 1/E_1$，$a_{22} = 1/E_2$，$a_{12} = -\nu_1/E_1 = -\nu_2/E_2$，$a_{66} = 1/G$

(1)式の特性方程式の根はこの場合，$s_1 = i\beta_1$，$s_2 = i\beta_2$，$s_3 = -i\beta_1$，$s_4 = -i\beta_2$（β_1，β_2は実の常数）となり，これらの係数はつぎのようになる。

$$\beta_1^2\beta_2^2 = E_1/E_2 \quad , \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = E_1/G - 2\nu_1$$

いま適合条件式(1)を満足し，さらに境界条件：

無限遠において，　$\sigma_x^{(\infty)} = p\cos^2\delta$，　$\sigma_y^{(\infty)} = p\sin^2\delta$，　$\tau_{xy}^{(\infty)} = p\sin\delta\cos\delta$

円形坑道周縁において，　$\sigma_r = 0$，　$\tau_{r\theta} = 0$

を満足するような応力関数を求め，それより応力成分を算出するとつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= p\cos^2\delta + 2\,Re\left[s_1^2\varphi_0'(z_1) + s_2^2\psi_0'(z_2)\right] \\
\sigma_y &= p\sin^2\delta + 2\,Re\left[\varphi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)\right] \\
\tau_{xy} &= p\sin\delta\cos\delta - 2\,Re\left[s_1\varphi_0'(z_1) + s_2\psi_0'(z_2)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

上式で $z_k = x + s_k y$　($k = 1,\ 2$) であって，$\varphi_0(z_1)$ 及び $\psi_0(z_2)$ は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_0(z_1) &= -\frac{ipa^2(1 - is_1)}{4(s_1 - s_2)}\left\{\frac{(s_2\sin 2\delta + 2\cos^2\delta)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2(1 + s_1^2)}} + \frac{i(2s_2\sin^2\delta + \sin 2\delta)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2(1 + s_1^2)}}\right\} \\
\psi_0(z_2) &= -\frac{ipa^2(1 - is_2)}{4(s_1 - s_2)}\left\{\frac{(s_1\sin 2\delta + 2\cos^2\delta)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2(1 + s_2^2)}} + \frac{i(2s_1\sin^2\delta + \sin 2\delta)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2(1 + s_2^2)}}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(3)式を(2)式に代入することによりつぎのように円形坑道周縁応力σ_θを求めることができる。

$$\sigma_\theta = \frac{p}{E_1 N}\left[\left\{\cos^2\delta + (m - n)\sin^2\delta\right\}m\sin^2(\theta + \delta) + \left\{(1 + n)\cos^2\delta + m\sin^2\delta\right\}\cos^2(\theta + \delta)\right.$$
$$\left. + n(1 + n - m)\sin\delta\cos\delta\sin(\theta + \delta)\cos(\theta + \delta)\right] \qquad (4)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}
m &= -\sqrt{E_1/E_2}\ , \qquad n = \sqrt{2\left(\sqrt{E_1/E_2} - \nu_1\right) + E_2/G} \\
N &= \frac{\cos^4(\theta + \delta)}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1}\right)\sin^2(\theta + \delta)\cos^2(\theta + \delta) + \frac{\sin^4(\theta + \delta)}{E_2}
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

計算を容易にするために $\nu_1 = 0$ とおけば $1/G = 1/E_1 + 1/E_2$ となる。$E_2/E_1 = 1 \sim 10$ に対し $\delta =$

$0°, 22.5°, 45°, 67.5°, 90°$ の場合について σ_θ を求め，地山の異方性に伴う最大応力の変化状態を図示すれば図-2のようである。さらに最大圧縮，引張応力の生ずる位置は次式で求められる。

$$\left\{(1-m)^4(1+m^2)^2\sin^2 2\delta - 4m(1-m)^2\cos^2 2\delta\right\}\sin^4\varphi - \left\{m^2(1-m)^4(1+m^2)\sin^2 2\delta - 2m(1-m)^2\cos^2 2\delta\right\}\sin^2\varphi + m^2(1-m^2)\sin^2\delta = 0 \tag{6}$$

(2) 坑道の変形について

図-1のように座標軸を選び，x, y 方向の変位を u, v で表わせば，平面歪状態での各歪成分は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy} \tag{7}$$

(7)式に(2)式を代入して積分すれば，u，v はつぎのように与えられる。

$$u(x,y) = 2Re\left[p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)\right] - \gamma_0 y + \alpha_0, \quad v(x,y) = 2Re\left[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)\right] + \gamma_0 x + \beta_0 \tag{8}$$

ここに $p_1 = a_{11}s_1^2 + a_{12}, \quad p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12}, \quad q_1 = (a_{12}s_1^2 + a_{22})/s_1, \quad q_2 = (a_{12}s_2^2 + a_{22})/s_2$ (9)

(8)式に(3)式を用いれば，結局

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= 2(-a_{11}\beta_{1,2}^2 + a_{12})\Bigg[\frac{p(\cos^2\delta + \beta_{2,1}^2\sin^2\delta)}{2(\beta_{2,1}^2 - \beta_{1,2}^2)}x - \frac{pa(1+\beta_{1,2})}{4(\beta_{1,2}-\beta_{2,1})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots\cdots 2n}\cdot\frac{a^{2(n-1)}(1-\beta_{1,2}^2)^{n-1}}{(x^2+\beta_{1,2}^2y^2)^{2n-1}}\Bigg\{-a\sin 2\delta(1+\beta_{2,1})\times \\
&\times\sum_{r=1}^{n}(-1)^r {}_{2n-1}C_{2r-1}\beta_{1,2}^{2r-1}x^{2n-2r}y^{2r-1} + 2a(\cos^2\delta - \beta_{2,1}\sin^2\delta)\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_{2n-1}C_{2r}\beta_{1,2}^{2r}x^{2n-2r-1}y^{2r}\Bigg\}\Bigg] - \frac{1}{2}(-a_{11}\beta_2^2 + a_{12})p\sin 2\delta\cdot y \\
v(x,y) &= \frac{2(-a_{12}\beta_{1,2}^2 + a_{22})}{\beta_{1,2}}\Bigg[\frac{p(\cos^2\delta + \beta_{2,1}^2\sin^2\delta)}{2(\beta_{2,1}^2 - \beta_{1,2}^2)}\beta_{1,2}y - \frac{pa(1+\beta_{1,2})}{4(\beta_{1,2}-\beta_{2,1})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots\cdots 2n}\cdot\frac{a^{2(n-1)}(1-\beta_{1,2}^2)^{n-1}}{(x^2+\beta_{1,2}^2y^2)^{2n-1}}\Bigg\{a\sin 2\delta(1+\beta_{2,1})\times \\
&\times\sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r {}_{2n-1}C_{2r}\beta_{1,2}^{2r}x^{2n-2r-1}y^{2r} + 2a(\cos^2\delta - \beta_{2,1}\sin^2\delta)\sum_{r=1}^{n}(-1)^r {}_{2n-1}C_{2r-1}\beta_{1,2}^{2r-1}x^{2n-2r}y^{2r-1}\Bigg\}\Bigg] + \frac{(-a_{12}\beta_2^2 + a_{22})}{2\beta_2}\cdot p\sin 2\delta\cdot x
\end{aligned} \tag{10}$$

坑道の周縁においては $\sqrt{(x+i\beta_{1,2}y)^2 - a^2(1-\beta_{1,2}^2)} = a(i\sin\theta + \beta_{1,2}\cos\theta)$ が成立つから，(10)式より円形坑道周縁における半径及び接線方向の変位を求めると，$\nu_1 = 0$ と仮定して，

$$\left.\begin{aligned}
u_r &= \frac{pa}{E_1E_2}\Big[\left\{5E_2\cos^2\delta + 4\sqrt{E_1E_2}(\cos^2\delta - \sin^2\delta)\right\}\cos^2\theta + (2.5E_2 + 8\sqrt{E_1E_2} + 4.5E_1)\sin 2\delta\sin\theta\cos\theta \\
&\quad + \left\{5E_1\sin^2\delta - 4\sqrt{E_1E_2}(\cos^2\delta - \sin^2\delta)\right\}\sin^2\theta\Big] \\
u_\theta &= \frac{pa}{E_1E_2}\Big[(0.5E_2 + 4\sqrt{E_1E_2} + 2E_1)\sin 2\delta\cos^2\theta + \left\{-(5E_2 + 8\sqrt{E_1E_2})\cos^2\delta + 5E_1\sin^2\delta\right\}\sin\theta\cos\theta \\
&\quad + (2E_2 + 4\sqrt{E_1E_2} + 2.5E_1)\sin 2\delta\sin^2\theta\Big]
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

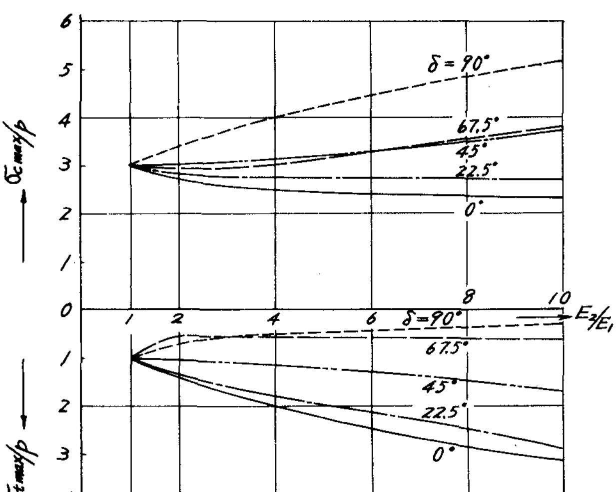

図-2

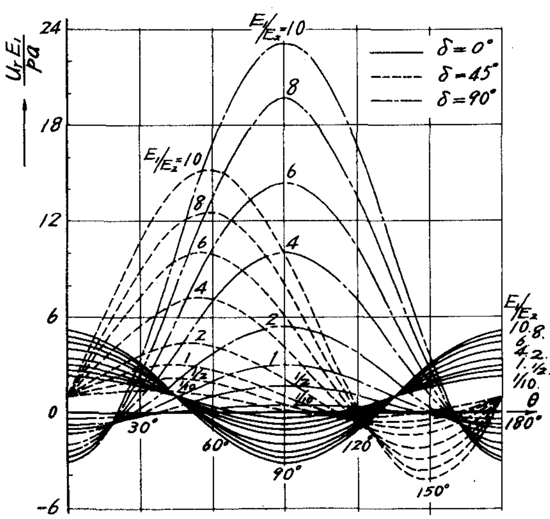

図-3