

V-11 片持梁の衝撃運動について

防紅大 学校 正員 狩俣恒一

均一，延性材質の片持梁が衝撃集中荷重を任意の位置に受けた場合を，弾性及び弾塑性解で取扱ってみる。

図-1に示す片持梁に，固定端($x=0$)から l_1 の位置に時間とともに変化する Blast Type の衝撃荷重 $F(t)$ (図-2) が作用せしめる。かかる場合，荷重の作用位置，大きさ及び作用時間の長短等によつて，梁は弾性段階における運動をおこし，ついで弾塑性段階における運動に進む。(図-3) 弾塑性段階においては塑性ヒンジが固定端だけにおこる場合(弾塑性ヤ1変形，図-3, b)からついで載荷点にも発生する場合(弾塑性ヤ2変形，図-3, c)へと進展して行くものと考えられる。

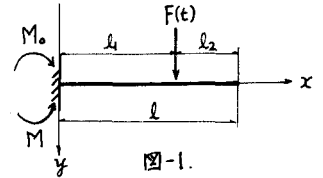


図-1.

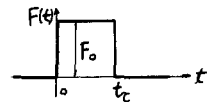


図-2.

1. 弾性段階における運動

題意による此の梁の強制振動の微分方程式は，回転慣性および剪断力の影響を無視すると次の形で表わされる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F(t)}{EI} \sum_n X_n(x) X_n(l_1) \quad (1)$$

ここで $a^2 = \frac{m}{EI}$ ， m は単位長さあたりの質量， EI は撓み剛度， $X_n(x)$ は此の梁の振動形態における直交正規標準函数

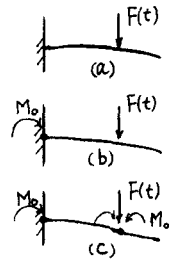


図-3.

$$\text{境界条件は } x=0; \quad y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \quad x=l; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(l, t) = 0 \quad (2)$$

$$\text{初期条件を } y(x, 0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (3)$$

と仮定する。

境界条件(2)式および初期条件(3)式を満足する(1)式の解は次のようになる

$$t_c > t > 0 \text{ に対し; } y(x, t) = \frac{F_0}{m l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(l_1)}{\beta_n^2} X_n(x) (1 - \cos \beta_n t) \quad (4.a)$$

$$t > t_c \quad n \text{ に対し; } y(x, t) = \frac{F_0}{m l^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(l_1)}{\beta_n^2} X_n(x) (\cos \beta_n (t - t_c) - \cos \beta_n t) \quad (4.b)$$

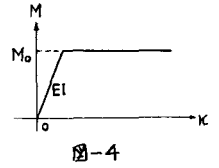
$$\text{ここで } X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - \frac{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l + \sin \beta_n l} (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x), \quad \cosh \beta_n l \cos \beta_n l = -1, \quad \beta_n^4 = a^2 \nu_n^2$$

$$X_n(l_1) = \cosh \beta_n l_1 - \cos \beta_n l_1 - \frac{\cosh \beta_n l + \cos \beta_n l}{\sinh \beta_n l + \sin \beta_n l} (\sinh \beta_n l_1 - \sin \beta_n l_1)$$

2. 弾塑性段階における運動

弾塑性段階における梁の強制振動の解析を次の仮定のもとに進める。すなわち(1). 梁の

塑性ヒンジ発生場所以外の部分は弾性挙動を行いかつ塑性ヒンジの所に生ずる力及びモーメントの作用を受ける。(2). 塑性ヒンジの領域は小さい断面として表われ、その領域は形及び位置をかえない。(3). 梁は理想塑性材料で、モーメント-曲率の関係は図-4に示すとおりとする。(4). 全速度効果は考慮しない。



2. 弾塑性等変形

梁の弾性段階は固定端における曲げモーメントが極限曲げモーメント M_0 になった時間 $t = t_1$ で終る。此の弾塑性状態においては、固定端は一定モーメント M_0 の強制運動を受け、ここの撓み角は拘束されない。弾塑性変形が始まる時間 t_1 における撓み及び撓み速度は、(4)式の級数の1項のみで近似式を採用し、 t_1 は $t=0$ の近傍でおさると仮定すると、次のようになる。

$$-M(0, t_1) = M_0 = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) \quad \text{から} \quad \cos \omega t_1 = 1 - \frac{\beta^2 l^2 M_0}{2 \times (l_1) F_0 l} \quad (5)$$

$$\text{従って} \quad y(x, t_1) = \frac{M_0 l^2 X(x)}{EI 2 \beta^2 l^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, t_1) = \frac{a M_0}{2 m \sqrt{4RS-1}} \quad \left(s = \frac{F_0 l \beta}{M_0}, \quad R = \frac{X(l_1)}{\beta^2 l^2}, \quad \beta = \frac{x}{l} \right) \quad (6)$$

此の状態における梁を支配する強制振動の微分方程式は

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{F(t)}{EI} \sum_{i=0}^{\infty} Y_i(x) \cdot Y_i(l_1) \quad (7)$$

$$\text{境界条件は} \quad x=0; \quad y(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{M_0}{EI}, \quad x=l; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l, t) = 0 \quad (8)$$

境界条件(8)式および初期条件として(6)式を満足する(7)式の解は次の形で表わされる。

$$y(x, t) = \frac{M_0 l^2}{EI} \left(\frac{x^5}{40 l^5} - \frac{x^3}{4 l^3} + \frac{x^2}{2 l^2} \right) + (A_0 + B_0(t-t_1) + P_0 \frac{(t-t_1)^2}{2}) \frac{\sqrt{3}}{l} x + \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(x) (A_i \cos \omega_i(t-t_1) + B_i \sin \omega_i(t-t_1) + P_i) \quad (9)$$

$$\text{ここで} \quad Y_i(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin^2 K_i l - \sin^2 K_i x}} (\sinh K_i l \sin K_i x + \sin K_i l \sinh K_i x) \quad i > 1$$

$$\text{振動数方程式は} \quad \tanh K_i l = \tan K_i l, \quad K_i l = i\pi + \frac{\pi}{4}, \quad K_i^4 = \omega_i^2 a^2$$

$$A_0 = \frac{M_0 l^2}{EI} \sqrt{3} \left(\frac{1}{\beta^2 l^2} - \frac{11}{140} \right), \quad B_0 = \frac{M_0 l^2}{EI} \frac{\sqrt{3} \sqrt{4RS-1}}{a l^2}, \quad P_0 = \frac{M_0 l^2}{EI} \frac{\sqrt{3} (S_1 - 1)}{a^2 l^4} \quad \left(S_1 = \frac{F_0 l_1}{M_0} \right), t > t_1; S_1 = 0$$

$$A_i = - \frac{M_0 l^2}{EI} \frac{\beta^4 l^4 (\sinh K_i l + \sin K_i l)}{K_i^7 l^7 \left(1 - \frac{\beta^4 l^4}{K_i^4 l^4} \right) \sqrt{\sin^2 K_i l - \sin^2 K_i x}}$$

$$B_i = - \frac{M_0 l^2}{EI} \frac{\beta^2 l^2 \sqrt{4RS-1}}{K_i^5 l^5 \left(1 - \frac{\beta^4 l^4}{K_i^4 l^4} \right) \sqrt{\sin^2 K_i l - \sin^2 K_i x}} \sqrt{2} (\sinh K_i l + \sin K_i l)$$

$$P_i = \frac{M_0 l^2}{EI} \frac{Y_i(l_1)}{\beta K_i^4 l^4} S (1 - \cos \omega_i(t-t_1)) \quad t_0 > t > 0 \quad k \neq l$$

$$= \frac{M_0 l^2}{EI} \frac{Y_i(l_1)}{\beta K_i^4 l^4} S \left\{ \cos \omega_i(t-t_1) \{ \cos \omega_i(t_0-t_1) - 1 \} + \sin \omega_i(t-t_1) \sin \omega_i(t_0-t_1) \right\} \quad t > t_0 \quad k \neq l$$

以下講演り際述べる。文献 1. "Impulsive Motion of Elastoplastic Beams" by H.H. Bleich and M.G. Salvadori, Proc. ASCE, No. 207, Sep. 1953, 2. "Beam Vibration with Time-Dependent Boundary Conditions" by R.D. Mindlin and L.E. Goodman, J. Appl. Mech. Dec. 1950